

ФРАКТАЛЬНЫЕ АНТЕННЫ

ПРИНЦИПИАЛЬНО НОВЫЙ ТИП "ЛОМАНЫХ" АНТЕНН, ЧАСТЬ 2*

Продолжим рассмотрение фрактальных антенн, перспективных для беспроводных систем связи. Большой интерес вызывают фрактальные антенны на основе ломаных линий, синтезируемых с помощью нетрадиционных методов, позволивших уменьшить их габариты и увеличить полосу пропускания. И хотя пока интенсивные исследования фрактальных антенн продолжаются, они уже появляются на рынке благодаря усилиям разработчиков.

ДИПОЛИ НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛОВ МИНКОВСКОГО, ГИЛЬБЕРТА И ИХ МОДИФИКАЦИЙ

Весьма близок по своим свойствам к антенне на основе фрактала Коха – диполь, сформированный по закону ломаной Германа Минковского [2]. При построении этой антенны вместо системы треугольников на прямой формируются меандры убывающих размеров. В Университете Патраса предложена модификация ломаной Минковского, основанная не на квадратном, а на прямоугольном шаблоне [22]. Такая модификация названа авторами фрактальной прямоугольной ломаной (Fractal Rectangular Curve, FRC) (рис.10). При синтезе этой ломаной использован довольно нетрадиционный для фракталов метод. Своим появлением FRC обязана так называемой кривой квадратов (Squares Curve) [23], инициатором которой служит квадрат. На первом шаге рекурсии его вершины становятся центрами четырех квадратов со сторонами вдвое меньшей длины (рис.11). Далее, в вершинах этих квадратов вновь располагаются центры еще меньших четырехугольников, и процесс рекурсивного синтеза повторяется. Примечательно, что на каждом новом шаге периметр получаемой фигуры увеличивается в два раза. Именно одну из четырех сторон этого геометрического объекта ученые Университета Патраса и предложили использовать как самостоятельную фрактальную конструкцию для построения антенн (см. рис.10) [22]. Обобщение заключалось в переходе от иницирующего квадрата к произвольному прямоугольнику.

*Продолжение. Начало см.: ЭЛЕКТРОНИКА: НТБ, 2007, №5, с.78.

В.Слюсар

Антенны на основе FRC-ломаной имеют ряд преимуществ перед вибраторами Коха и Минковского. Например, согласно [22], при печатном исполнении монополю в виде FRC-3 на резонансную частоту 2,45 ГГц занимает область, ограниченную прямоугольником площадью 53,72 мм² со сторонами 15,8 и 3,4 мм ($\approx \lambda/8 \times \lambda/36$). Для той же частоты высота обычного линейного вибратора равна 23,5 мм. Габариты монополя Коха вписываются в прямоугольник площадью 125 мм², а монополя Минковского – 64 мм². При этом полоса пропускания FRC-3-антенны составляет 770 МГц, а вибраторов Коха и Минковского – 490 и 280 МГц, соответственно. Другое преимущество FRC-3-антенны в печатном исполнении – увеличенное (до 84 Ом) внутреннее сопротивление против 50 Ом для печатных монополей Коха и Минковского. КПД монополя с геометрией FRC-3 равен ~94%. Перечисленные факторы, по мнению авторов [22], делают FRC-3-антенны привлекательными для реализации на их основе приемных решеток MIMO-терминалов в ноутбуках и карманных компьютерах.

В антенных приложениях встречается, по меньшей мере, три модификации еще одной топологии SFC-кривой, приписываемой Минковскому, шаблоном которой служит "биполярный скачок" (рис.12).

Две из них отличаются порядком заполнения наиболее протяженных прямолинейных сегментов шаблона на последующих итерациях. При этом в случае строгого следования ка-

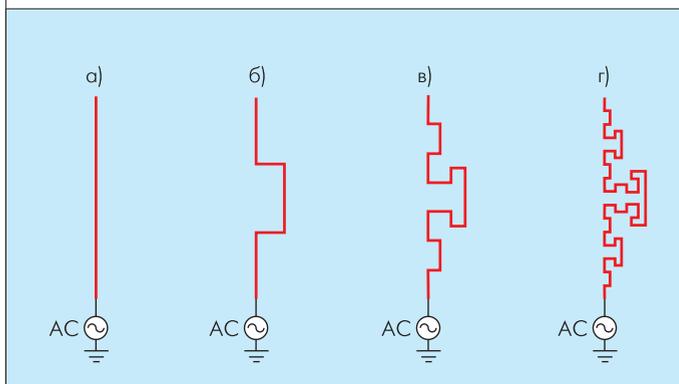


Рис.10. Формирование фрактальной прямоугольной ломаной антенны: исходный вибратор (а) и первые три итерации монополя – FRC-1 (б), FRC-2 (в), FRC-3 (г) [22]

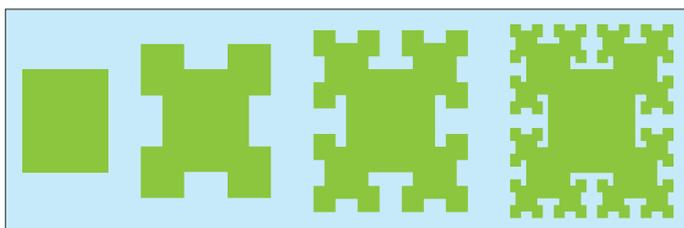


Рис. 11. Итерации прямоугольной рекурсии [22], обобщающей Squares Curve

нонам фрактальной геометрии, ломаная формируется с различными по высоте "биполярными скачками" (см. рис.12) [9]. Это закладывает предпосылки для расширения полосы приема антенны. В альтернативном варианте, предложенном исследователями Университета Патраса, протяженные сегменты в центре "скачка" на следующей итерации заменяются парой идентичных сегментов, равных по размаху остальным "скачкам" вдоль ломаной (рис.13).

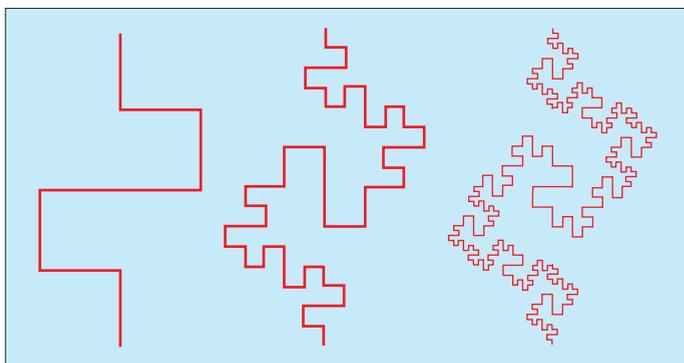


Рис. 12. Применение шаблона вида "биполярный скачок" при формировании топологии SFC-кривой Минковского [9]

Еще одна модификация заключается в отходе от строгих правил построения фракталов в пользу комбинации "биполярных скачков" Минковского и модулированного ими меандра. В работе [21] на основе антенн такой комбинированной геометрии предложено реализовать на PCMCIA-карте четырехэлементную антенную решетку поперечного приема для работы в системе MIMO на частотах ~2,4 ГГц (рис.14). Как показали исследования, проведенные в Университете Патраса [21], при таком конструктивном решении взаимное влияние антенн на некоторых частотах больше, чем у варианта на основе элементов перевернутой F-антенны (IFA), размещенных на четырех сторонах PCMCIA-модуля (рис.15).

Но в сравнении с IFA-решеткой высота антенных элементов в виде модифицированных "биполярных скачков" Минков-

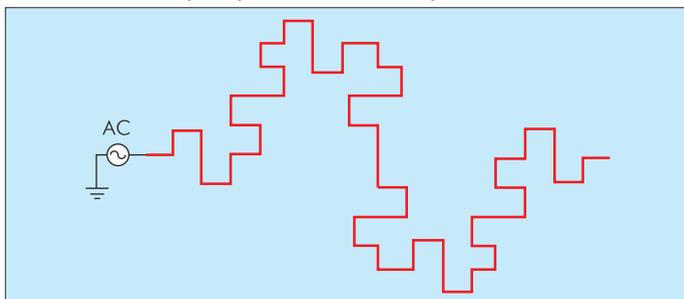


Рис. 13. Модификация "скачков" Минковского

ского меньше. К тому же они более широкополосны. Существуют и варианты совместного применения в одной PCMCIA-карте IFA и антенн Минковского [24]. Пристальное внимание, уделяемое вибраторам Минковского [21, 24, 25], свидетельствует о том, что этот тип антенн, возможно, вскоре можно будет отнести к разряду наиболее исследованных.

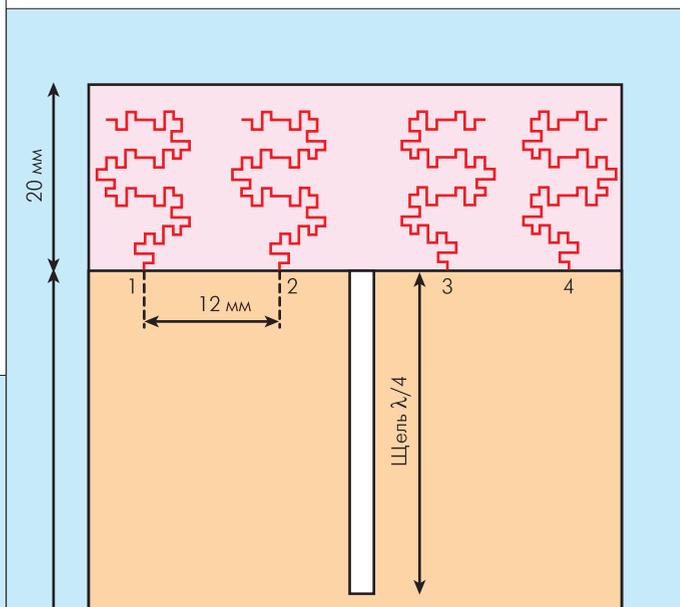


Рис. 14. Четырехэлементная антенная решетка MIMO-терминала [21]

По форме образующего элемента достаточно похожа на фрактал Минковского упоминавшаяся ломаная Гильберта (см. рис.3). Впервые миниатюрная антенна, основанная на такой рекурсивной геометрии, была представлена учеными Политехнического университета Каталонии [26]. Особенность простейшего варианта ее построения состоит в том, что исходный квадрат на первой итерации разбивается на четыре симметричных подквадрата, центры которых соединяются П-образной ломаной линией. Процесс декомпозиции подквадратов на новые квадранты повторяется, и П-сегменты, образованные при объединении центров квадрантов кривой, соединяются (см. рис.3). Размеры квадранта на n-ой итерации, при условии единичной длины сторон исходной фигуры, определяются как $2^{-n} \times 2^{-n}$, а длина L-монополя Гильберта увеличивается с каждой итерацией n согласно уравнению [27, 28]

$$L(n) = \frac{4^n - 1}{2^n - 1} h = (2^n + 1)h = (2^{2n} - 1)d, \quad (5)$$

где h – полная высота монополя (длина стороны описанного вокруг него квадрата), d – протяженность минимального прямолинейного сегмента. Для пятой итерации $L(5) = 33h$. Отсюда напрашивается вывод, что резонансная частота такого монополя Гильберта может быть в 33 раза меньше основной резонансной частоты прямолинейного вибратора высотой h. Однако на самом деле такое снижение номинала резонансных частот на практике невозможно из-за наличия взаимного влияния близко расположенных сегментов фракталь-

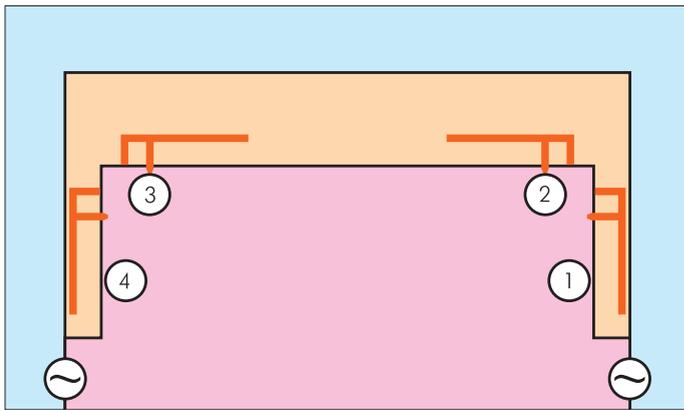


Рис. 15. Четырехэлементная IFA-решетка MIMO-терминала [21]

ной антенны, приводящего к укорачиванию ее электрической длины. Особенно сильное взаимодействие возникает между изломами проводника, в результате которого путь распространения электромагнитных волн от одного конца монополя к другому становится более коротким. Тем не менее, даже с учетом эффекта взаимного влияния резонансная частота может снижаться на порядок и более. В последние годы антенны на основе кривой Гильберта, благодаря их простоте и технологичности, лидируют по числу посвященных им публикаций, потеснив довольно долго удерживавшие пальму первенства антенны на базе префрактала Коха.

Диполи на основе ломаной Гильберта относятся к разряду тех немногочисленных фрактальных антенн, для которых на сегодняшний день получены аналитические соотношения по расчету резонансных частот. В упоминавшейся уже работе Виной [10] для вывода таких соотношений предложено структурировать ломаную на ключевые, с точки зрения электродинамики, сегменты. В частности в линии Гильберта следует различать параллельные проводники, короткозамыкающие перемычки и соединительные сегменты (рис.16).

С помощью методики Виной несколько первых резонансных частот могут быть рассчитаны минимизацией выражения

$$\left| m \frac{\eta}{4\pi f_r} \left[\lg \left(\frac{2d}{b} \right) \right] \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f_r d}{c} \right) + \frac{\mu_0}{2\pi} s \left[\lg \left(\frac{4s}{b} \right) - 1 \right] - \frac{\mu_0}{\pi} \frac{rc}{4f_r} \left[\lg \left(\frac{2rc}{bf_r} \right) - 1 \right] \right| \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $r \geq 1$ – порядковый номер резонансной частоты, f_r – значение r -ой резонансной частоты. Формула уточнена автором статьи по отношению к опубликованному в [10] выражению в результате анализа любезно предоставленного Виной текста компьютерной программы, которая использовалась для численного расчета резонансных частот. Формула (6) применима для уединенного диполя. Она не учитывает высокочастотные эффекты и, следовательно, не может дать точные результаты для высших резонансов.

Исследования антенн на основе фрактала Гильберта примечательны тем, что они породили первые серьезные сомнения в абсолютном превосходстве фрактальных систем над евклидовыми. Ученые Политехнического университета Каталонии [28] показали, что монополю Гильберта по эффективности проигрывает антенне, выполненной в виде серпантинной линии или меандра. Геометрия последних обеспечивает лучший КПД, большее внутреннее сопротивление и меньшую добротность антенны, а следовательно, более широкую полосу пропускания. Однако, как выяснилось, относительно низкое внутреннее сопротивление присуще лишь варианту монополя, запитанному по краю фрактала. Совсем иной результат наблюдается, если изменить точку подключения фидера, сместив ее в глубину вдоль ломаной Гильберта. Как показали исследователи Университета штата Пенсильвания, при оптимальном выборе местоположения контактной площадки фидерного соединения можно обеспечить примерно 50-Ом активное внутреннее сопротивление антенны на первой (фундаментальной) резонансной частоте, независимо от номе-

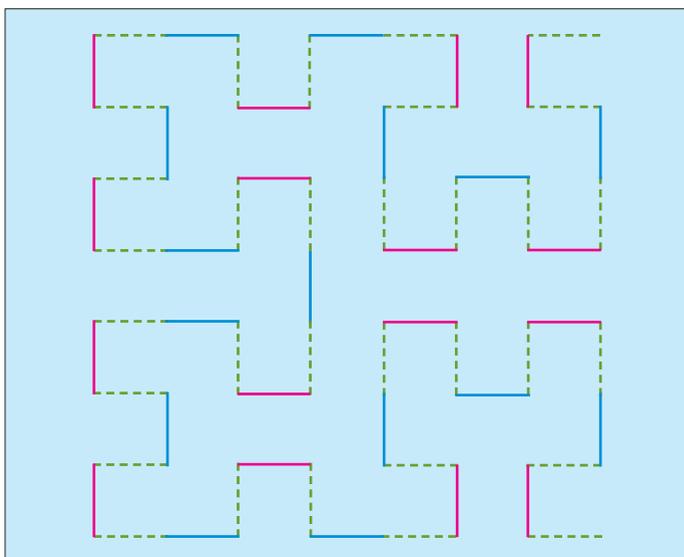


Рис. 16. Сегментация ломаной Гильберта на электродинамически значимые фрагменты

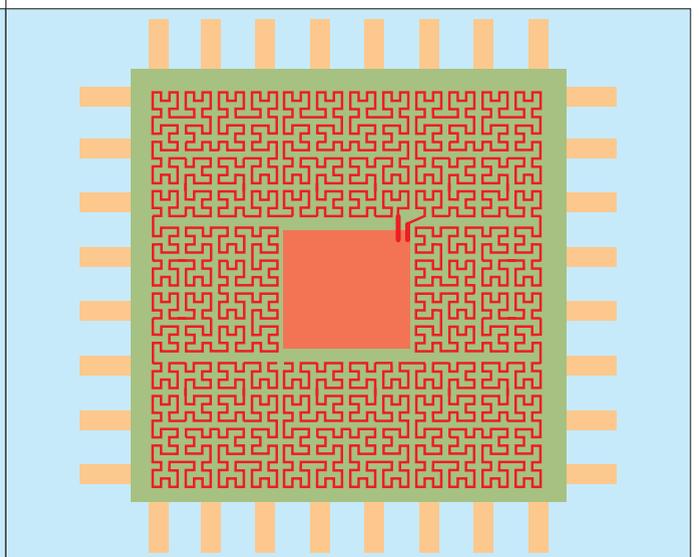


Рис. 17. Вариант выполнения фрактальной антенны в составе системы на кристалле (SoC) [29]

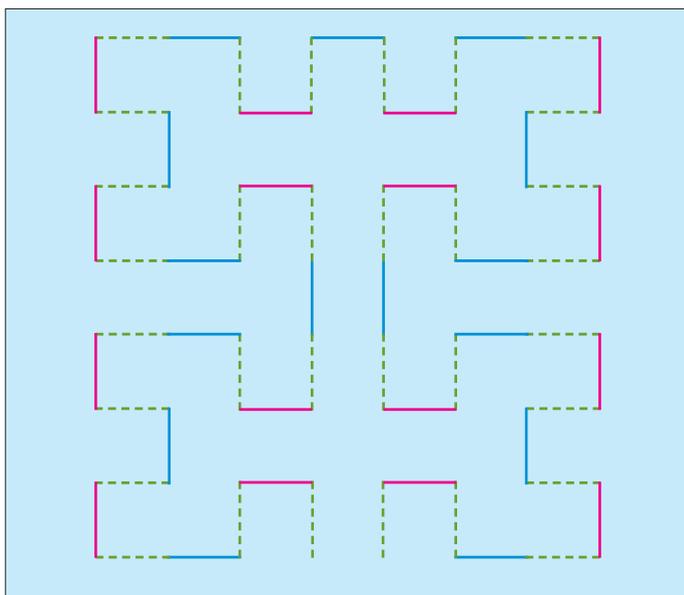


Рис.18. Ломаная Мура

ра итерации [27]. Но платой за такое постоянство значения внутреннего сопротивления антенны является сужение полосы пропускания на низких частотах (для первых итераций фрактала) по сравнению с полосой пропускания для итераций большего порядка.

Антенны на базе ломаной Гильберта рекомендуется использовать при создании системы на кристалле (SoC) [29]. В этом случае антенный модуль и радиотехнические устройства могут быть размещены в одном корпусе (рис.17), а большая физическая длина линии позволяет диполям работать на длинах волн, несоизмеримо больших, чем габариты SoC. На основе этой и других SFC-кривых могут быть выполнены плоские спиральные антенны для устройств радиочастотной идентификации (RFID-метки). Это позволяет существенно уменьшить габариты RFID-меток (см. рис.17).

Среди других фрактальных антенн, прежде всего, следует упомянуть SFA на базе варианта кривой Гильберта (см.

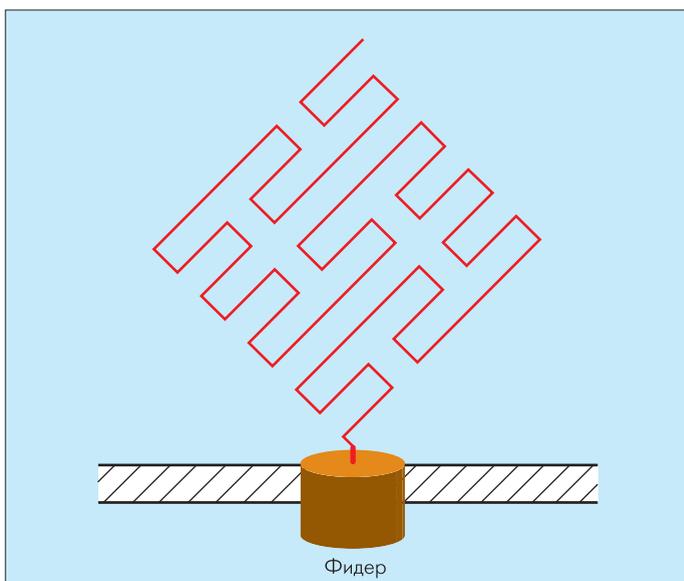


Рис.19. Вариант пространственной ориентации монополя Пеано [9]

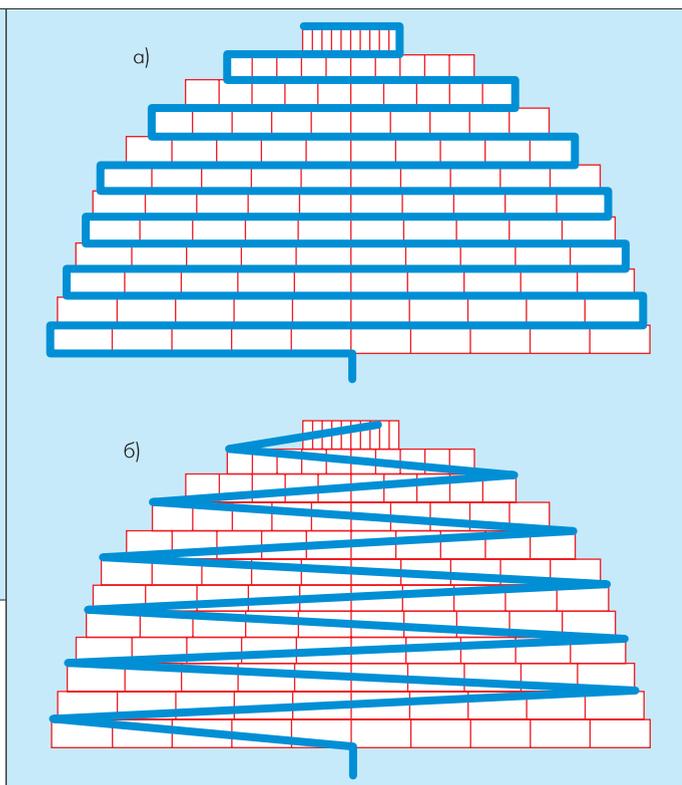


Рис.20. Монополи, выполненные в виде серпантинных линий евклидовой геометрии: меандровый (а) и зигзагообразный (б)

рис.16), который в 1900 году предложил американский математик Мур (E.H.Moore) (рис.18) [30]. Ученые Политехнического института Вустера (США) сопоставили свойства этой антенны с печатной антенной по рекурсии Гильберта [31]. В результате моделирования сделан вывод о достаточно близких значениях резонансных частот обоих типов антенн, реализуемых одинаковым числом итераций, и о подобии зависимостей, характеризующих изменение их внутренних импедансов. Для приближенного расчета резонансных частот антенны, полученной путем сегментации проводника по закону ломаной Мура (см. рис.18), следует использовать то же соотношение (б), что и для антенны Гильберта.

Совпадение аналитических соотношений для расчета резонансных свойств антенн Мура и Гильберта – свидетельство инвариантности аналитического метода к особенностям геометрии антенны. В этом смысле численное моделирование, например в пакете NEC, занимает более выигрышные позиции, поскольку оно более чувствительно к различиям в топологии фрактальных антенн.

Серьезный недостаток многих электрически малых резонансных антенн, в том числе и антенны Гильберта, – относительно большие уровни кросс-поляризации. Наименьшие кросс-поляризационные компоненты в наводимых токах характерны для конструкции антенны по фракталу Пеано (рис.19). В частности, уровень подавления кросс-поляризационной помехи второй итерации SFA-конструкции антенны Пеано, вписанной в квадрат 70×70 мм, превышает 60 дБ в обеих плоскостях поляризации. А уровень кросс-поляриза-

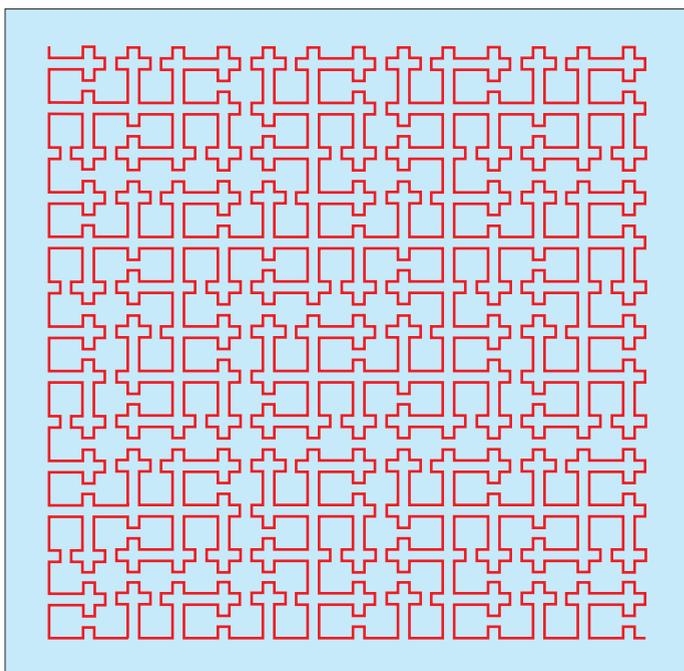


Рис.21. Ломаная Осгуда [36]

ции антенны Гильберта третьего порядка почти той же электрической площади и с аналогичной резонансной частотой составляет около $-9,5$ дБ [32]. Столь существенная разница в кросс-поляризационных характеристиках двух типов антенн – в основном следствие зеркальной симметрии Гильберт-геометрии вдоль одной из осей, тогда как кривая Пеано обладает диагональной центральной симметрией. Поэтому при приеме сигналов диагональ SFA-антенны Пеано обычно ориентируют параллельно вектору электрической напряженности падающих электромагнитных волн (см. рис.19).

Основное отличие линии Пеано от кривых Гильберта и Мура – разбиение исходного единичного квадрата не на четыре, а на девять частей с размерами $3^{-n} \times 3^{-n}$ каждая, где n – номер итерации. При этом длина соединительных сегментов ломаной линии Пеано равна 3^{2n} . Для произвольной высоты описанного квадрата h протяженность минимального прямолинейного сегмента линии n -ой итерации может быть рассчитана по формуле [32]:

$$d = \frac{h}{3^n - 1}, \quad (7)$$

где h – полная высота монополя.

Полная длина ломаной (см. рис.19) на n -ой итерации, вписанной в квадрат со стороной h , определяется зависимостью [32-33]

$$L(n) = (3^{2n} - 1)d = (3^n + 1)h. \quad (8)$$

Неординарные поляризационные свойства позволяют рекомендовать антенну Пеано для формирования сигналов двойной поляризации с целью повышения пропускной способности каналов передачи средств связи. Комбинацию пары таких монополярных антенн, ориентированных в ортогональных плоскостях, можно рассматривать в качестве компактной альтернативы турникетной антенне. На базе этого примера можно сде-

лать вывод, что для достижения низкого уровня кросс-поляризационной помехи целесообразно использовать фрактальные антенны с центральносимметричной структурой.

С точки зрения КПД, рассматриваемый тип антенны проигрывает серпантинным вибраторам евклидовой геометрии, варианты которых показаны на рис.20. Хотя этот проигрыш при близких электрических размерах и не превышает десятка процентов, сам по себе данный факт лишает фрактальные антенны ореола превосходства и исключительности, который им поначалу приписывался.

Впрочем, серпантинные конструкции, подобно всем известным фрактальным антеннам, также не позволяют достичь рассмотренного автором в [33] фундаментального предела добротности. Этот факт вынуждает с одной стороны искать

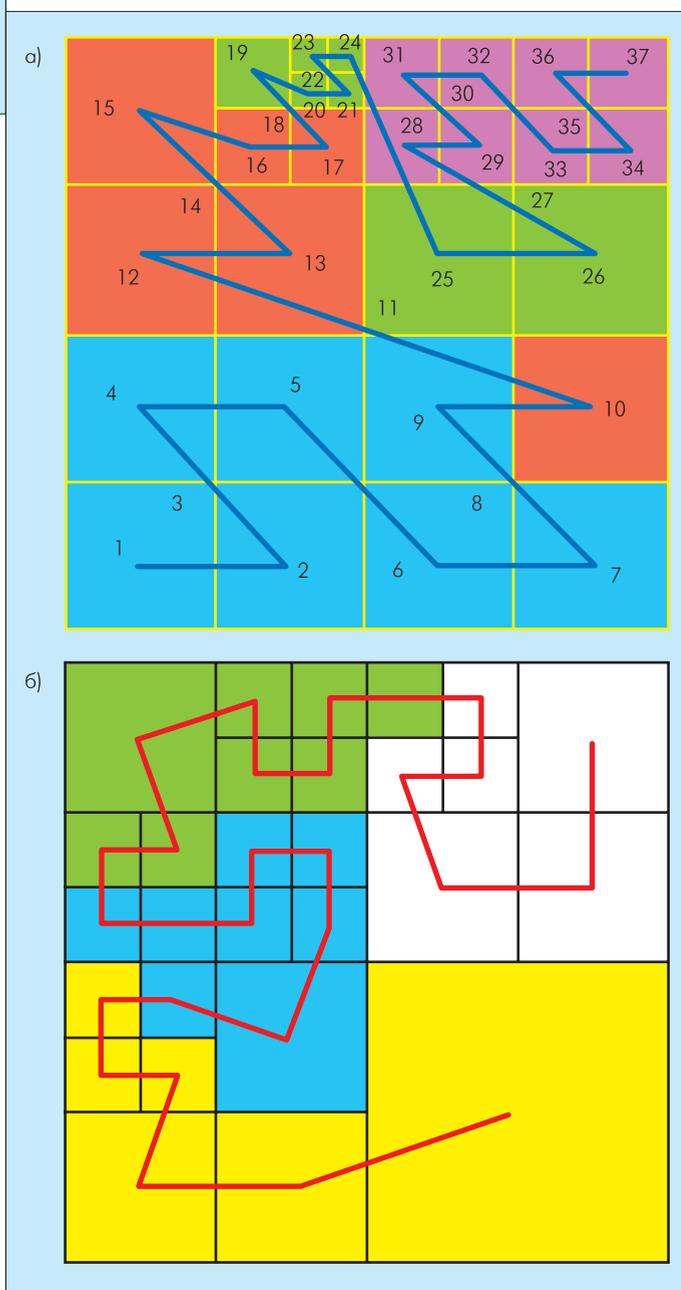


Рис.22. Модифицированные фракталы Лебега (а) и Гильберта (б), сочетающие фрагменты разных итераций [37]

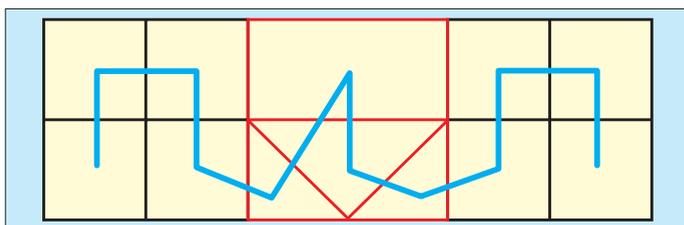


Рис.23. Комбинированная рекурсия

новые антенные решения, а с другой – пересмотреть указанный предел. Как отмечается исследователями Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе [34], для приближения характеристик антенны к предельным значениям следует увеличивать диаметр ее проводника, а также применять в ее топологии трехмерные версии префракталов.

В Политехническом университете Каталонии был проведен сопоставительный анализ уточненного фундаментального предела и оценок добротности реальных фрактальных ЭМА [35]. При этом для антенн на основе префракталов Коха, Пенано, Гильберта и других получено довольно хорошее совпадение границы добротности с результатами моделирования. В отношении монополей, нагруженных серпантинной (меандровой) линией (MLLM, Meander Line Loaded Monopoles), по всей видимости, имеющих более равномерное распределение тока, указанная граница при $ka < 0,8$ проходит несколько выше экспериментальных значений.

Достаточно интересной для антенных приложений является SFC-конструкция Осгуда* (рис.21) [36]. Линии Осгуда мало известны широкому кругу исследователей, поэтому анализ электродинамических свойств соответствующих им антенн еще не проводился.

Не изучены и электродинамические свойства антенн на основе смешанных итераций префракталов, отдельные SFC-участки которых содержат фрагменты разных уровней рекурсии (рис.22) [37]. На этой основе могут строиться адаптивно реконфигурируемые антенны, в которых с помощью МЭМС-технологии можно выстраивать в единую кривую различные по форме участки исходного фрактала высшего порядка. О возможности подобной реконфигурации фрактальных антенн свидетельствует описание патента [38] и работа [10], где рассмотрены направленные свойства монополя Гильберта при различных вариантах короткого замыкания его фрагментов. С помощью МЭМС-ключей в такой антенне можно смещать резонансную частоту и направление максимума диаграммы направленности. В рамках такого подхода возможны аддитивные комбинации нескольких различных геометрических фрагментов в пределах исходной фигуры. Например, в Университете Британской Колумбии (Канада) на этой основе предложена комбинированная рекурсивная линия, отдельные фрагменты которой соответствуют кривой Гильберта (рис.23) [39].

* Названа в честь математика Вильяма Фогга Осгуда (W. F. Osgood), описавшего новый класс простых SFC-линий с плавно регулируемой размерностью.

Следует отметить, что комбинация нескольких фракталов в одной линии может быть выполнена не только аддитивным способом, но и мультипликативно. Впервые электрические свойства фрактальных монополей, полученных в результате мультипликативной комбинации кривых Коха и Гильберта (рис.24), исследовал Виной [10]. Как следует из [10], дополнительная "модуляция" сегментов плоского префрактала Гильберта по закону ломаной линии Коха позволяет, в конечном счете, увеличить общую длину линии более чем в четыре раза. Однако намного результативнее не заменять прямолинейные сегменты ломаными Коха до второй итерации включительно, а повышать порядок рекурсии Гильберта, если это возможно.

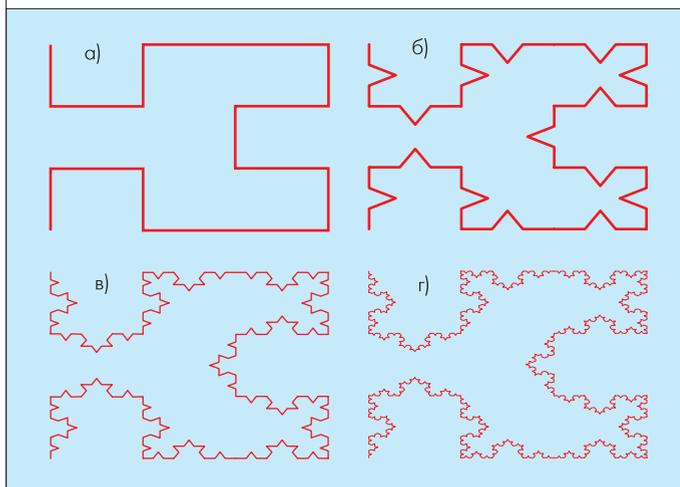


Рис.24. Симбиоз кривой Гильберта и Коха: а) базовая геометрия кривой Гильберта; б) первая; в) вторая; г) третья итерации мультипликативной комбинации кривых Коха и Гильберта [10]

В целом, гибридные антенные решения, мультипликативно сочетающие несколько различных фракталов, заслуживают дальнейшего исследования с целью расширения числа возможных рекурсивных комбинаций.

В завершение рассмотрения используемого в антенной технике семейства простейших фрактальных линий, ориентированных на заполнение квадратной или прямоугольной площадки, следует остановиться на ломаных Серпинского (Sierpinski). Вариант SFC-конструкции Серпинского предусматривает итерированную фрагментацию исходного квадрата не только по горизонтальным и вертикальным линиям, но и по диагоналям [40]. Суть этой идеи проще всего объяснить на основе треугольного фрагмента квадрата (рис.25). Постепенное деление треугольников путем разбиения пополам одной из сторон, позволяет получить несколько вариантов рекурсивных кривых, соединяющих центры треугольных фрагментов. В работе [41] изложены результаты исследования учеными Политехнического университета Каталонии свойств нескольких итераций печатной антенны в виде стрелообразной петли Серпинского (рис.26).

Рассмотренный перечень фрактальных объектов, используемых в качестве геометрического прототипа антенной конс-

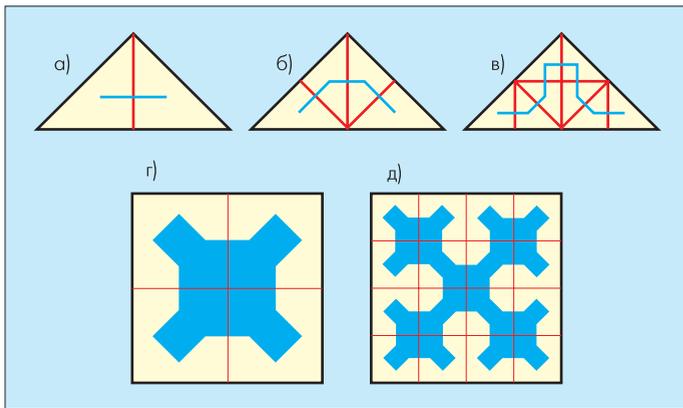


Рис.25. Варианты построения ломаных Серпинского: а,б,в – технология построения стрелообразной ломаной на нулевой, первой, второй итерациях; г, д – первая и вторая итерации стрелообразной петли

трукции, может быть дополнен плоскими фигурами в виде фрактальных деревьев, салфеток Коха, Минковского, Серпинского и т.п., а также их объемными версиями [42]. Для изготовления трехмерных конструкций могут использоваться фаббер-технологии трехмерного прототипирования, позволяющие прецизионно сформировать миниатюрные антенны любой сложности [43].

Среди известных примеров серийных моделей фрактальных антенн следует упомянуть продукцию испанской компании Fractus. Ей принадлежит более 140 национальных и меж-

дународных патентов в этой области. Часть из них зарегистрирована и в Российской Федерации (например, патент № 2263378). Среди последних разработок компании – фрактальная антенна Micro Reach Xtend™ на диапазон 2,4 ГГц (для систем с адаптов яWi-Fi, Bluetooth и Zigbee). Ее габариты составляют всего 3,7×2 мм, что соответствует размерам рисового зерна. Другое направление разработок Fractus – технология создания "антенны в корпусе", получившая созвучное название AiP (Antenna-in-Package). При этом реализуются идеи, аналогичные представленным на рис.17, когда вся радиосистема, включая антенну, выполняется в одной микросхеме.

В заключение следует отметить, что усилиями энтузиастов и компаний типа Fractus антенны на основе фрактальных композиций постепенно перестают быть экзотикой. Разумеется, они не решают все проблемы миниатюризации антенных устройств. Но несомненно это направление создания ЭМА достаточно эффективно и занимает вполне авторитетные позиции в современной технике.

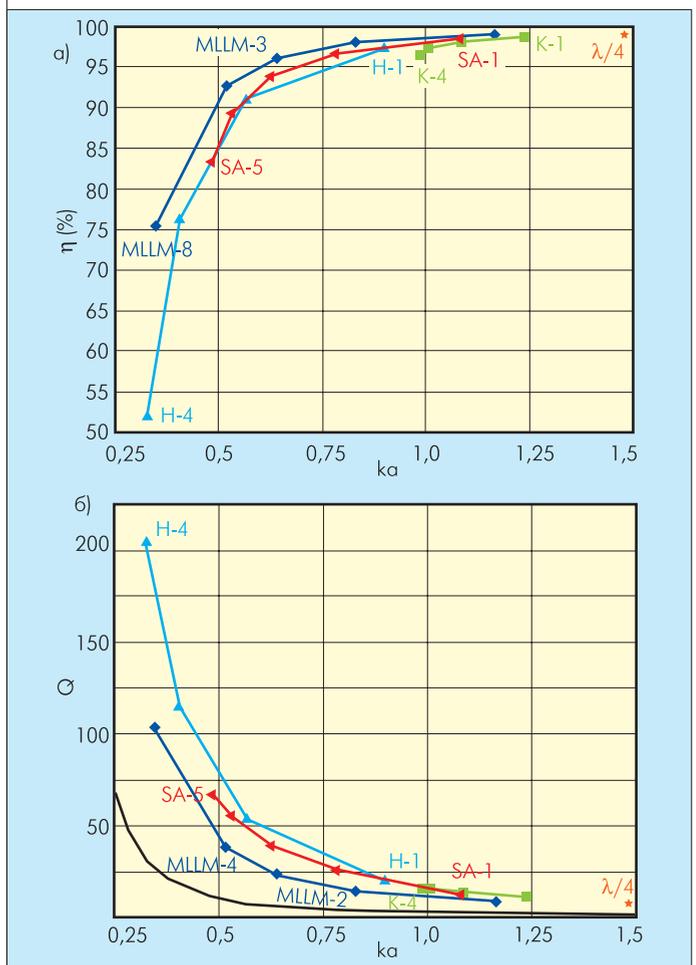


Рис.26. Расчетные значения КПД (а) и добротности (б) антенн. MLLM – монополь, нагруженный серпантинной линией, К-п и Н-п – монополи Коха и Гильберта n-й итерации, SA-n – антенна на основе n-й итерации стрелообразной ломаной Серпинского. Нижняя сплошная линия в позиции (б) соответствует фундаментальному пределу добротности $Q_1 = 1/(k^3 \cdot a^3) + 1/(ka)$ [33]



ЛИТЕРАТУРА

22. **Tsachtsiris G., Karaboikis M., Soras C. and Makios V.** A Novel Fractal Rectangular Curve Printed Monopole Antenna for Portable Terminals. – URSI International Symposium on Electromagnetic Theory. – Pisa, Italy, May 23–27, 2004. – www.ee.bgu.ac.il/~specmeth/EMT04/pdf/session_3/3_14_06.pdf.
23. **Marneffe T.** The Squares Curve. – users.swing.be/TGMSoft/curvesquares.htm.
24. **Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Papamichael V. and Makios V.** Multi element antenna systems for diversity and MIMO terminal devices. – Laboratory of Electromagnetics. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Patras. – Patras, Greece – 2004.
25. **Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G. and Makios V.** Three-branch Antenna Diversity Systems on Wireless Devices Using Various Printed Monopoles. – 2003 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, – Istanbul. May 11–16, 2003. – www.loe.ee.upatras.gr/EM/Conferences/Three-branch%20Antenna%20Diversity%20Systems%20on%20Wireless%20Devices%20Using%20Various%20Printed%20Monopoles.pdf.
26. **Gonzalez-Arbesu J. M., Blanch S. and Romeu J.** The Hilbert Curve as a Small Self-Resonant Monopole From a Practical Point of View. – *Microwave And Optical Technology Letters*. Oct.5, 2003, v.39, N1, p.45–49.
27. **Zhu J., Hoorfar A., Engheta N.** Bandwidth, Cross-Polarization, and Feed-Point Characteristics of Matched Hilbert Antennas. – *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*. – 2003, v.2, p.2–5. – repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1010&context=ese_papers.
28. **Anguera J., Puente C., Martinez E. and Rozan E.** The Fractal Hilbert Monopole: a Two-Dimensional Wire. – *Microwave And Optical Technology Letters*. – Jan.20, 2003, v.36, N2, p. 102–104. – www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/anguera_motl_36_102_03.pdf.
29. WO Patent № 04/042868. International Patent Classification7 H01Q 1/38. Integrated Circuit Package Including Miniature Antenna// Soler Castany, Jordi, Anguera Pros, Jaime, Puente Baliarda, Carles; Borja Borau, Carmen. – Publication Date – 21.05.2004.
30. Moore E.H. On certain crinkly curves. – *Trans. Amer. Math. Soc.* 1900, N1, p. 72 – 90.
31. **Chen X., Liu Y., Safavi-Naeini S.** Printed Plane-Filling Fractal Antennas for UHF Band. 2004 IEEE Society International Conference on Antennas and Propagation, Monterey. – maxwell.uwaterloo.ca/~x9chen/xuan_APS2004_v2.pdf.
32. **Zhu J., Hoorfar A., Engheta N.** Peano Antennas. – *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, – 2004, v.3, Issue1, p.71–74. – repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1003&context=ese_papers.
33. **Слюсар В.И.** 60 лет теории электрически малых антенн. Некоторые итоги. – *ЭЛЕКТРОНИКА: НТБ*, 2006, N7.
34. **Gianvittorio J.P.** Fractals, MEMS, and FSS Electromagnetic Devices: Miniaturization and Multiple Resonances. – Dissertation for the Degree Doctor of Philosophy in Electrical Engineering. – University of California. Los Angeles. – 2003. – www.ee.ucla.edu/~johng/research/Gianvittorio_Dissertation.pdf.
35. **Rius J.M., Gonzalez-Arbesu J.M., Romeu J.** and others. Conclusions of the FractalComs Project: Exploring the Limits of Fractal Electrodynamics for the Future Telecommunication Technologies. – IST-2001-33055. – 2004. – www.tsc.upc.es/fractalcoms/downloads/Fractalcoms_2004_APS.pdf.
36. Lindenmayer systemer. – www.246.dk/lssystem.html.
37. Adaptive mesh refinement. Part I. Lecture slides. – University of Illinois at Urbana-Champaign. Astronomy 496CAC. – Computational Astrophysics and Cosmology. – Spring 2003. – www.astro.uiuc.edu/classes/astr596cac/lecture20.pdf.
38. United States Patent № 6,525,691. H01Q 01/38. Miniaturized conformal wideband fractal antennas on high dielectric substrates and chiral layers. // V.K. Varadan, K.J. Vinoy, J.A. Kollakompil, and V.V. Varadan. – Publication Date – Feb. 25, 2003.
39. **Fung J.** Towards Adaptive Rendering of Smooth Primitives on GPUs. – Master Thesis of Science in the Faculty of Graduate Studies (Computer Science). The University Of British Columbia. Oct. 2005, 63 p. – www.cs.ubc.ca/grads/resources/thesis/Nov05/Jennifer_Fung.pdf.
40. **Sierpinski W.** Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane. – *Bull. Acad. Sci. de Cracovie (Sci. math. et nat., Se'rie A)*. – 1912, p. 462–478.
41. **Gonzalez-Arbesu J.M. and Romeu J.** On the Influence of Fractal Dimension on Radiation Efficiency and Quality Factor of Self-Resonant Prefractal Wire Monopoles. – Columbus, Ohio (USA). – June 21–28, 2003.
42. **Слюсар В.И.** Фрактальные антенны. – Широкополосные беспроводные сети передачи информации. Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. – М.: Техносфера. 2005, с.529–542.
43. **Слюсар В.И.** Фаббер-технологии: новое средство трехмерного моделирования. – *ЭЛЕКТРОНИКА: Наука, Технология, Бизнес*. 2003, N5, с.54–60.