

А. И. Миночкин, В. И. Рудаков, В. И. Слюсар

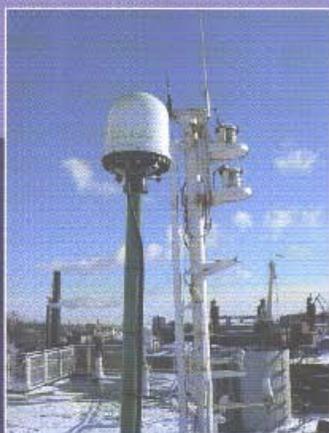
# ОСНОВЫ ВОЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

**ТЕОРИЯ  
И ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 2**

---

**Синтез средств  
информационного  
обеспечения  
вооружения и военной  
техники**



А. И. Минович, В. И. Рудаков, В. И. Слюсар

**ОСНОВЫ  
ВОЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ.**

**ТЕОРИЯ  
И ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Том 2** \_\_\_\_\_

**Синтез средств  
информационного обеспечения  
вооружения и военной  
техники**

Монография

Под редакцией А.П. Ковтуненко

Киев 2011

УДК 623.61.621.396.43  
ББК Ц50  
3 91

Коллектив авторов:  
А.И. Миначкин (второй и третий разделы),  
В.И. Рудаков (подраздел 1.2), В.И. Слюсар (подраздел 1.1 и четвертый раздел)  
*Рецензенты:*

**С.М. Порошин**, д-р техн. наук, проф.  
(Национальный технический университет (ХПИ))  
**М.И. Луханин**, д-р техн. наук, проф.  
(Центральный научно-исследовательский институт  
вооружения и военной техники Вооруженных Сил Украины)

*Рекомендовано к печати научно-техническим советом  
Центрального научно-исследовательского института  
вооружения и военной техники Вооруженных Сил Украины (протокол  
№11 от 20 октября 2011 г.)*

У монографії викладені у прикладних аспектах сучасні методологічні основи та методичний апарат синтезу засобів інформаційного забезпечення озброєння та військової техніки.

Можливість використання таких основ та апарату проілюстрована на прикладах синтезу перспективних засобів інформаційного забезпечення озброєння та військової техніки.

**3 91** Основы военно-технических исследований. Теория и приложения : монография в 3 т. Т. 2. Синтез средств информационного обеспечения вооружения и военной техники / [А.И. Миначкин, В.И. Рудаков, В.И. Слюсар] / под ред. А.П. Ковтуненко. – К., 2011. – 528 с.

**ISBN 978-966-2726-00-8**

**ISBN 978-966-2726-04-06 (Т. 2.)**

В монографии изложены в прикладных аспектах современные методологические основы и методический аппарат синтеза средств информационного обеспечения вооружения и военной техники.

Возможность использования таких основ и аппарата проиллюстрирована на примерах синтеза перспективных средств информационного обеспечения вооружения и военной техники.

Материалы монографии могут быть полезны для студентов, аспирантов и докторантов высших технических учебных заведений, а также для научных сотрудников научно-исследовательских и научно-производственных организаций.

**УДК 623.61.621.396.43  
ББК Ц50**

**ISBN 978-966-2726-00-8**

**ISBN 978-966-2726-04-06 (Т. 2.)**

© А.И. Миначкин,  
В.И. Рудаков, В.И. Слюсар, 2011.

## ВВЕДЕНИЕ

Эффективность применения современных систем вооружения и военной техники по назначению в значительной мере зависит от качества их информационного обеспечения в сложных и непрерывно изменяющихся условиях боевой обстановки. В первую очередь это относится к своевременности и достоверности информационного обеспечения по всей совокупности его составляющих. Создание средств информационного обеспечения, соответствующего современным и перспективным требованиям к его качеству, сопряжено со значительными экономическими затратами. В связи с чем значительно возросла цена ошибок в принятии решений на разработку и производство таких средств.

Цена ошибок определяется уровнем достоверности решения задач формирования совокупности научно-технических решений на построение конкретных образцов средств информационного обеспечения, реализацией которых обеспечивалось бы выполнение требований к его качеству по критерию «эффективность-стоимость».

Формирование совокупностей научно-технических решений по созданию таких средств осуществляется по результатам их синтеза.

В общем случае синтез любых технических средств военного назначения включает в себя синтез требований к их тактико-техническим характеристикам по функциональному назначению, требований к структурам построения и алгоритмам функционирования, требований к способам реализации заданных показателей эффективности их функционирования по назначению.

В настоящей монографии изложен в прикладных аспектах развитый её авторами современный теоретический аппарат синтеза перспективных средств информационного обеспечения систем вооружения и военной техники.

В первом разделе монографии изложены методологические основы и методический аппарат синтеза перспективных средств информационного обеспечения на основе современных методов обработки сигналов, в частности, технологии ММО и ее многопользовательского варианта реализации с использованием цифровых антенных решеток. В прикладном аспекте рассмотрен синтез одного из типов средств связи, основанного на использовании свойств тропосферного распространения радиоволн. В основу синтеза положены результаты развития общей теории адаптивной компенсации быстрых и медленных затуханий сигналов и потерь усиления антенны при тропосферном распространении радиоволн. Процедура синтеза включает в себя три этапа.

На первом этапе на основе теории минимаксных решений синтезированы допустимые значения коэффициентов затуханий сигналов при тропосферном распространении радиоволн и минимального уровня потерь усиления антенны, при которых обеспечиваются требования по информационной надёжности средств связи.

На втором этапе синтезированы требования к показателям эффективности приёма и обработки сигналов при тропосферном распространении радиоволн.

На третьем этапе синтезированы рекуррентные алгоритмы приёма и обработки сигналов по критериям минимизации уровня потерь усиления антенны и максимизации правдоподобия законов распределения быстрых и медленных затуханий сигналов.

Предложена новая методика расчёта энергетического потенциала средства связи, что позволяет, в конечном итоге, определить показатели потенциальной эффективности синтезируемого средства связи в целом.

Во втором разделе изложены методология и методический аппарат синтеза структуры оперативного управления мобильными компонентами сетей связи и состава методов управления, приведены основы его математического обеспечения.

В отличие от известных подходов, показана целесообразность введения в структуру формирования решений интеллектуальной системы управления мобильными компонентами сетей связи схемы нечёткого управления, которая использует описания мобильной компоненты в виде нечёткой базы знаний и преобразует его в последовательную совокупность решений. Такой подход позволяет процедуру управления свести к учёту последовательности цикла управления и осуществить переход от задачи формирования абстрактного решения к задаче многокритериальной оптимизации решения на множестве нечётко заданных целей и альтернатив, представленных в виде иерархии целей.

В третьем разделе изложены методологические основы математического обеспечения оперативного управления мобильными компонентами сетей связи. Приведены концептуальные основы математического обеспечения управления и разработанные модели систем его реализации. В отличие от известной методологии решения аналогичных задач, предложен новый подход к построению прикладного математического обеспечения управления мобильными компонентами сетей связи (сетей с динамическими компонентами). Разработаны методологические основы предложенного подхода реализации, в том числе основы формирования модельного базиса построения ма-

тематического обеспечения, принципов его построения (эволюционность, единство информационной базы, распределённость компонент) и изложена эволюционная методика построения прикладного математического обеспечения управления.

В четвертом разделе изложен методический аппарат синтеза средств обеспечения систем вооружения радиолокационной информацией. Указанный методический аппарат включает в себя также элементы развития существующего теоретического аппарата решения таких задач. В частности, предложены новые методы формализации отклика многокоординатных цифровых антенных решёток, основанные на теории торцевых произведений матриц. Новый математический аппарат позволил унифицировать процедуру синтеза сложных радиолокационных средств, уменьшить вычислительные затраты на реализацию матричных моделей радиолокационных средств с цифровыми антенными решетками.

Приведенные усовершенствованные методы оценки потенциальной точности и определения предельной разрешающей способности многоканальных радиолокационных средств на базе цифровых антенных решеток позволяют значительно повысить достоверность оценки показателей потенциальных возможностей синтезируемых средств обеспечения систем вооружения радиолокационной информацией.

Заслуживают также внимания и с теоретической, и с практической точек зрения усовершенствованные методы совместно измерения координат лоцируемых объектов и способы повышения точности дальнометрии.

# РАЗДЕЛ 1

## СИНТЕЗ СРЕДСТВ СВЯЗИ

### 1.1. Концептуальные основы синтеза перспективных средств связи

По мнению зарубежных аналитиков, необходимость использования в перспективе все возрастающего количества роботизированных боевых средств и, в первую очередь, беспилотных разведывательных и ударных летательных аппаратов, порождает серьезную проблему безошибочной передачи огромных информационных массивов. Согласно планам США, к 2015 г. безэкипажными должны стать около трети применяемых на поле боя наземных боевых средств сухопутных войск. Осуществляемый в вооруженных силах США переход от телеуправляемых систем к полностью автономным безэкипажным платформам в перспективе имеет целью замену совокупности автономных платформ на систему роботизированных комплексов.

С другой стороны, высокая динамичность и быстротечность боевых действий приводит к ускоренному старению собранной огромными усилиями информации, что выдвигает на первый план не менее важную задачу своевременной доставки информационных данных. Для преодоления эффекта “ножниц”, порождаемого несоответствием растущих объемов информационных потоков низкой скорости их доставки потребителям, зарубежные специалисты усиленно ищут новые методы организации тактических сетей телекоммуникаций.

Известно, по меньшей мере, несколько проектов создания высокопроизводительных сетей передачи данных в ходе боевых действий. Отличительной особенностью большинства из них является широкое использование ретрансляторов сигналов на основе беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) и спутниковой

связи. В частности, на рис. 1.1 представлен пример подобной архитектуры боевой сети ARMMNet, концепция которой была разработана университетом UCLA в рамках проекта Minuteman (Multimedia Intelligent Network of Unattended Mobile Agents).

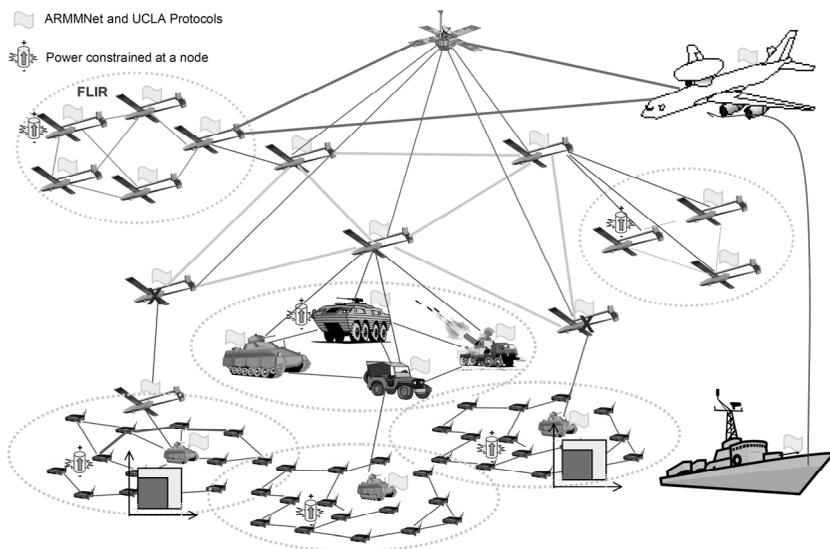


Рис. 1.1. Архитектура боевой сети ARMMNet

Один из вариантов создания многофункциональной информационно распределительной системы (Multi-function Information Distribution System, MIDS) в виде глобальной информационной решетки (Global Information Grid, GIG) базируется на интеграции совокупности объединенных тактических систем радиосвязи (JTRS), функционирующих в каждом виде вооруженных сил. На рис. 1.2 [74] представлен системный образ перспективной глобальной информационной сети, образованной совокупностью информационных решеток (сетей) театров боевых действий (Theater Grid) [74]. Каждая из них, в свою очередь, состоит из нескольких тактических решеток (Tactical Grid). В основании ин-

формационной пирамиды находятся фиксированные решетки (Fixed Grid) стационарной сетевой компоненты и мобильные поверхностные решетки (Surface Grid), реализованные на основе тактической Интернет и JTRS, объединенные в упомянутые тактические решетки, посредством аэромобильных сетей Link 11, 16, 22. Сюда же входят информационные тактические сети необслуживаемых сенсорных датчиков.

Ключевыми компонентами GIG являются океано-морская, сухопутная и воздушная сетевые группировки. GIG должна стать физической основой единой многофункциональной информационно-управляющей системы C4ISR (Command, Control, Communications, Computers, Intelligence, Surveillance & Reconnaissance), интегрирующей функции управления войсками, оружием, разведкой, радиоэлектронной борьбой, а также связи, навигации, ориентирования и государственного опознавания.

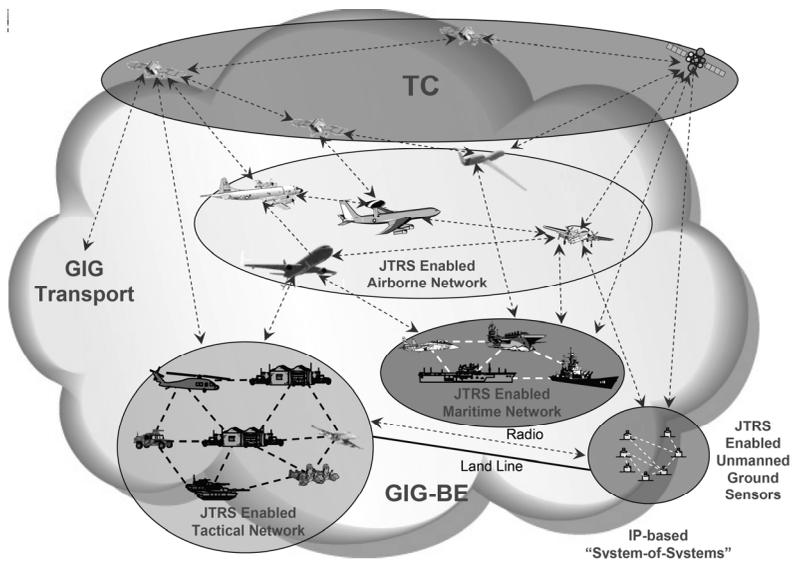


Рис. 1.2. Глобальная информационная решетка (Global Information Grid)

Океано-морской сегмент глобальной информационной решетки получил наименование FORCEnet. Он представляет собой оперативно обусловленную по архитектуре организационно-техническую структуру, предназначенную для обеспечения ведения боевых действий на море, интегрирующую живую силу, сенсоры, командование и управление, платформы и оружие в сетевую, распределенную боевую силу. Принцип ее функционирования на концептуальном уровне пояснен на рис. 1.3 [71].

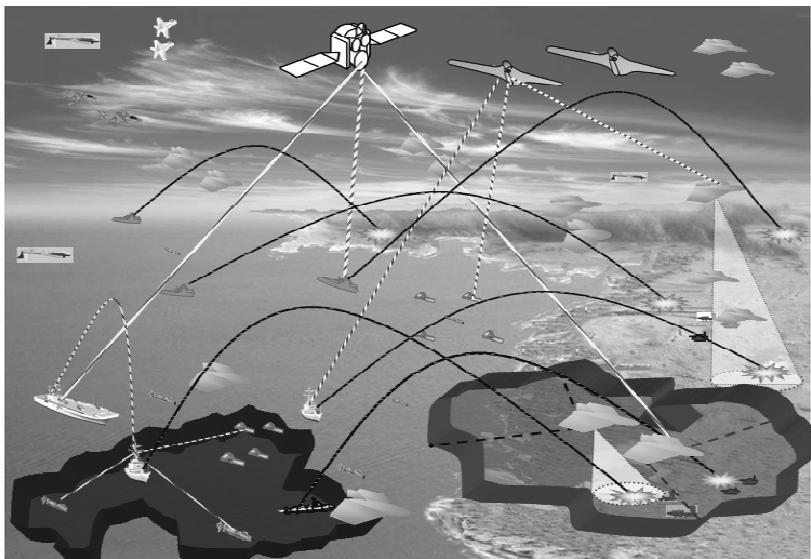


Рис. 1.3. Концепция FORCEnet

Поэтапным планом развертывания FORCEnet предусмотрено ее полное воплощение к 2020 гг., что позволит на тот момент революционно изменить возможности ВМС.

Сухопутный сегмент GIG в официальных документах военного ведомства США именуется как LandWarNet и включает интегрированные сети сухопутных войск, сил и средств армейского резерва и национальной гвардии США. Большое внимание в его

развитии уделяется обеспечению обслуживания перспективных боевых средств (Future Combat Systems, FCS), в том числе роботизированных, функционирующих в составе "компьютеризированных" соединений. Целью таких изменений является сокращение численности личного состава сухопутных войск с одновременным ростом их боевой эффективности не только за счет повышения мобильности, но и достижения абсолютного превосходства в информационной сфере. Непременным условием последнего является внедрение протокола IPv.6, технологии асинхронной передачи данных ATM (Asynchronous Transfer Mode), мобильных базовых станций, сочетающих радиорелейный режим работы с множественным радиодоступом. Каждый военнослужащий США получит возможность мобильного приема с помощью мультимедийного переносного или карманного компьютера, оснащенного радиотерминалом, видеоданных и графики в любое время суток, в любом месте земного шара.

Наконец, воздушный сегмент GIG, образованный интегрированными пилотируемыми и беспилотными летательными аппаратами, спутниками и обслуживающей их наземной инфраструктурой, получил название ConstellationNet. Все три компонента глобальной информационной решетки: FORCEnet, Land-WarNet, ConstellationNet – тесно взаимосвязаны, имеют единое адресное пространство, взаимно проникают друг в друга, обеспечивая бесшовную проводку абонентов. Столь тесная интеграция в единые сети улучшает ситуативное понимание и взаимодействие сил, повышает эффективность совместного принятия решений и боевого планирования, ведет к лучшей синхронизации действий через увеличенную скорость и качество отдаваемых боевых приказов и распоряжений.

Следует отметить, что подобные ожидания не лишены оснований. Как показывают результаты имитационного моделирования, опыт учений и тренировок [4], применение интегрированных в сети боевых подразделений уже в настоящее время позволяет

повысить эффективность выполнения ими своих миссий в 10 – 15 раз, по сравнению с традиционными по структуре войсками. При этом 10-кратно снижаются потери собственных сил и средств. Например, отношение потерь сетеинтегрированной штурмовой бригады к потерям обороняющегося противника может быть снижено с величины 10:1 до 1:1. Соответственно, для решения задач наступления больше не будет требоваться создание 10-кратного превосходства в силах и средствах, поскольку достаточно обеспечить численность группировки, равную численности обороняющейся стороны.

По оценкам зарубежных специалистов, в свое время оснащение истребителя F-15C в рамках проекта JTIDS радиоканалами передачи данных Link-16 в дополнение к голосовому управлению позволило более, чем на 250 % увеличить количество уничтожаемых за полет целей. В [72] данная цифра конкретизирована применительно ко времени суток, в частности, выигрыш в количестве успешно атакованных целей составляет 2,61 раза днем и 2,59 раза – ночью. Причины такого прироста проиллюстрированы на рис. 1.4 [65]. Как видно, повышение пропускной способности каналов передачи данных позволило резко сократить время на принятие решения и высвободить его для многократного повторения циклов стрельбы по новым целям. В результате беспрецедентно сокращается время боевого реагирования и повышается скорость маневра огнем. Техническое переоснащение бортовых средств связи, осуществляемое ВВС США в рамках создания физического уровня глобальной воздушной сети ConstellationNet, предполагает поэтапное повышение максимальной пропускной способности радиоканалов передачи данных в пределах прямой радиовидимости с 274 Мбит/с до 548 Мбит/с и далее – до 2,5 Гбит/с [65]. В первую очередь, такое повышение скорости передачи данных планируется в отношении радиолиний, связывающих БПЛА с воздушными пунктами управления.

Наглядным примером тенденций в развитии потребностей современных войск в повышении скорости передачи данных являются приведенные в [64] данные о фактических информационных потоках во время операции “Свобода Ирака”. Как видно из рис. 1.5, иллюстрирующего соответствующие изменения за период с сентября 2001 г. по май 2003 г., произошел скачкообразный рост услуг, предоставленных контингенту войск США, в частности, количество закрытых видеоконференций выросло в 22 раза (с двух до 44 на день), количество логистических запросов превысило 3100 в месяц, что в 17 раз больше первоначального уровня. Максимальные изменения произошли в сфере полевой оптоволоконной связи, где прирост ежесекундного трафика составил 138 раз. Объем потоков данных в единицу времени через каналы спутниковой связи (SATCOM) поднялся на порядок (до 3,2 Гбит/с), передача данных каналами NIPR/SIPR возросла 6-кратно (до 130 Мбит/с), а суммарный объем переговоров превысил 750 тысяч минут на день, что почти в 40 раз больше уровня 2001 года.

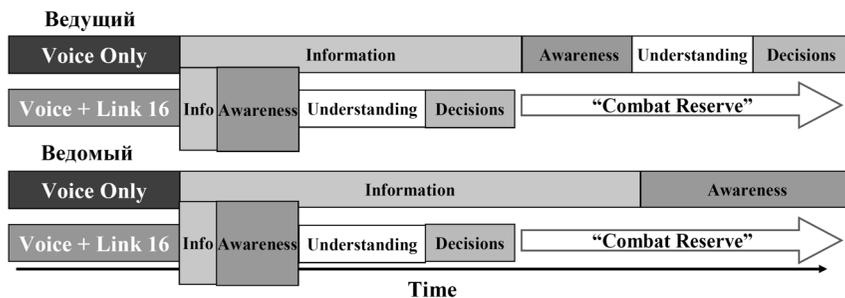


Рис. 1.4. Сопоставление временных диаграмм боевой работы ведущего и ведомого самолетов F-15C в голосовом режиме передачи данных и при использовании Link-16

Избыток циркулирующих в эфире данных позволит в ближайшем будущем решить задачу “информационного камуфляжа”, что не только затруднит извлечение критически важных

данных противником в случае перехвата радиосообщений, но и лишит всякого смысла такой перехват в столь сложной цифровой какофонии.

Учитывая указанные тенденции, в [64] отмечается потребность в создании наземных радиорелейных средств связи, обеспечивающих скорость передачи данных более 100 Мбит/с, а по линиям “портативный наземный терминал – спутник” – до 8 Мбит/с. Такой интенсивный путь развития предпочтительнее экстенсивного роста количества средств связи, имеющих низкую пропускную способность.

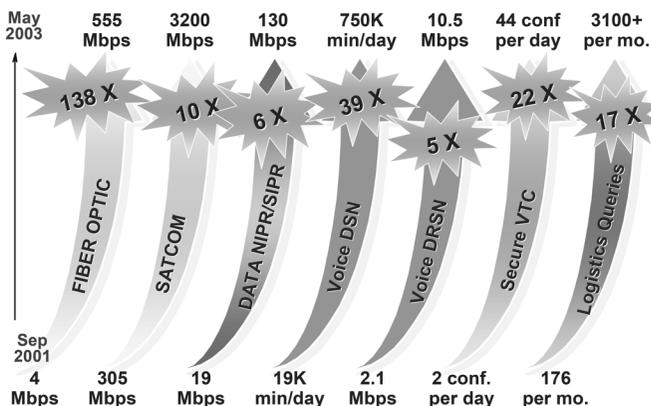


Рис. 1.5. Изменение нагрузки на средства связи американских войск во время операции “Свобода Ирака” (сентябрь 2001 г. – май 2003 г.)

В числе факторов, обуславливающих необходимость повышения скорости передачи данных, следует отметить современный уровень автоматизации процесса управления войсками, предполагающий использование цифровых карт местности, в том числе с трехмерным представлением географической информации, а также применение технологии компьютеризованного графического нанесения оперативной обстановки. Такие цифровые рабочие карты в перспективе должны обрабатываться минимум до

ротного звена с оперативным обменом данными по линиям связи. Сегодня на смену традиционной передаче формализованных сообщений о выявленных и пораженных целях, потерях, расходе боеприпасов и горючего, пришла необходимость трансляции видеоизображений с места боевых действий. К сказанному следует присовокупить необходимость привлечения цифровых фотоснимков высокого разрешения, полученных в реальном масштабе времени по данным аэро- и космической разведки, радиолокационных портретов местности, формируемых радарными с синтезированной апертурой на борту БПЛА и т.п.

Все это требует трансляции больших объемов данных в реальном масштабе времени. За рубежом автоматизация управления происходит на фоне расширения объемов циркулирующей информации, позволяющей сократить время на принятие решения, осуществление маневра огнем и минимизировать перерывы в огневом воздействии на противника, приближая его к непрерывному процессу на протяжении интервала времени, необходимого для достижения успеха операций. С этой целью, например, в странах НАТО реализуется программа оснащения средствами радиочастотной идентификации (так называемыми RFID-метками) ракет, боеприпасов и их укупорок, что позволяет автоматизировать процесс учета их наличия и состояния в хранилищах или непосредственно в подразделениях во время боевых действий. В дальнейшем предусмотрена комплектация RFID-считывателями каждого средства стрельбы или пускового устройства, что позволяет отследить путь боеприпаса от производства до конца его жизненного цикла (выстрела). Такой автоматический учет разгружает экипажи боевых машин от необходимости ручного подсчета расхода боеприпасов. В результате, в ходе боя с каждого орудия или пусковой установки через бортовой компьютер и каналы связи информация о текущем расходе боеприпасов и ракет должна централизованно стекаться в довольствующие подразделения логистики, создавая условия для эффек-

тивного планирования и быстрого пополнения боекомплектов боеспособных средств вооружения, не дожидаясь подачи заявок из подразделений.

Как известно, развертывание сетей радиосвязи в группировках войск обычно осуществляется с учетом максимального распараллеливания трасс прохождения сигналов, создания обходных и резервных путей передачи данных. Однако, учитывая время жизни радиосредств в современном бою, вполне возможно предположить возникновение ситуаций, когда для обеспечения передачи данных в какой-то момент времени доступными окажутся только несколько радиоканалов. В этом случае они должны будут обеспечить передачу многократно возросшего объема данных. Таким образом, в боевых условиях средства связи должны позволять обеспечивать многократный резерв пропускной способности по сравнению с практикой мирного времени.

Конечно, проблема создания высокоскоростных радиоканалов усугубляется тем, что полная их пропускная способность может понадобиться лишь в течение непродолжительного временного интервала, а большую часть времени эксплуатации будет невостребованной. Информационный поток при подготовке операции, в ходе различных видов боя и на разных направлениях отличается большой неравномерностью и спонтанностью. Однако никто не может гарантировать, что потеря управления войсками из-за перегрузки каналов связи именно в указанный непродолжительный интервал не станет решающей для исхода сражения.

Потребность в высокой скорости передачи данных обусловлена также необходимостью сокращения времени выхода в эфир, что снизит вероятность обнаружения радиосредств противником. Как следствие, снизится вероятность их огневого поражения и блокирования активными помехами. Кроме того, сокращение интервалов решения связных задач в перспективе позволит возложить на средства связи выполнение ряда несвойственных им прежде функций, например, радиотехнической разведки, пассивной

(по внешнему подсвету) радиолокации воздушных целей и др.

Детальная конкретизация концепций создания мобильных радиосетей предусмотрена в проектах создания сетей типа MANET (mobile ad-hoc networks). В работе [32], к примеру, отмечается, что мобильные радиосети MANET – это динамичная архитектура построения самоорганизующихся боевых сетей случайной топологии, предполагающая отсутствие фиксированных маршрутов передачи информации (рис. 1.6). Все элементы такой сети могут быть мобильными, в ней реализуется децентрализованный принцип управления, а роль сетевого узла может выполнять любой подключенный к ней терминал, реализующий функции хоста и маршрутизатора информационных пакетов (переносной компьютер, КПК, сенсорное устройство, роботизированное боевое средство и др. объекты, оснащенные радиомодемом).

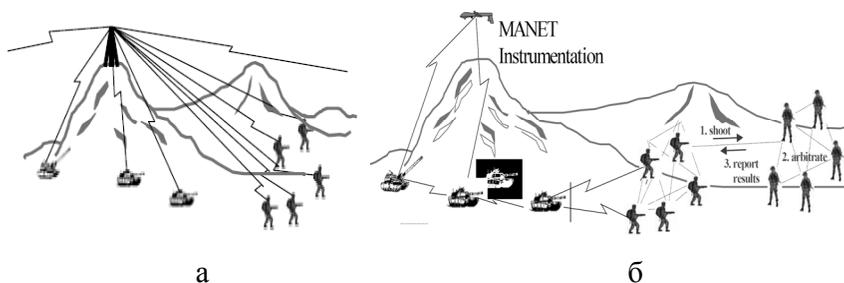


Рис. 1.6. Традиционная централизованная структура сети (а) и сеть типа MANET (б)

Согласно [32], к ключевым особенностям современных тактических сетей связи можно отнести:

- динамичную топологию (мобильные сетевые узлы подвергаются уничтожению и отказам из-за повреждений; каналы радиосвязи нестабильные, имеют переменную дальность связи и спорадическую пропускную способность из-за активного радиоэлектронного противодействия противника, взаимных помех, неблагоприятных условий распространения радиоволн и т.п.);

– ограниченные время выхода в эфир и мощность сигналов радиотерминалов, оснащенных аккумуляторными батареями, вынуждают сокращать время передачи данных и повышать скорость трафика;

– значительная размерность сетей (сотни или тысячи элементов, безотлагательно нуждающихся в одновременном доступе к каналам связи, к примеру, в "компьютеризированной" дивизии США будет насчитываться более 5000 компьютеров [32]).

Мобильные сетевые компоненты MANET призваны обеспечить информационный обмен в указанных специфичных условиях в интересах всех войск, действующих в тактической зоне, независимо от их подчиненности и выполняемых задач. Предполагается, что архитектура MANET будет неоднородной, иерархически структурированной в четыре взаимодействующих уровня [32].

Основными из них являются три [32]: мобильные радиосети низшего звена управления; радиосети мобильных базовых станций (МБС), образующих опорную радиорелейную сеть; воздушно-космические магистральные лазерные и радиосети, для реализации которых могут использоваться беспилотные летательные аппараты (БПЛА), воздушные пункты управления, аэростаты и другие стратосферные платформы, а также спутники. Дополнительную нишу, так называемого нулевого уровня, образуют при необходимости сенсорные сети (сети телеметрии), обеспечивающие сбор и передачу разведывательной, радиолокационной и другой информации о противнике на пункты управления войсками и оружием. Как правило, сенсорные платформы будут представлять собой интегрированные устройства, объединяющие датчики-регистраторы множества параметров состояния окружающей среды (радиационных, химических, биологических, акустических, вибрационных, инфракрасных, тепловизионных и т.п.) с соединенными в беспроводную радиосеть микрокомпьютерами-коммутаторами. Нетрудно предположить, что в перспективе

именно сенсорные сети будут поглощать львиную долю суммарного трафика в MANET.

В качестве магистрального направления развития физической основы таких сетей в зарубежной печати отмечается безусловное использование интеллектуальных антенных решеток (в отечественной литературе именуются как цифровые антенные решетки) и применение технологии MIMO (Multiple Input Multiple Output, множественный вход-множественный выход).

Особенно органично данные технологии вписываются в концепцию создания сети мобильных базовых станций (МБС). Как отмечено в [32], функционирование развернутой совокупности МБС должно строиться по принципам мобильной радиосети, а не согласно канонам сотовой или транкинговой связи, при этом главное отличие МБС состоит в использовании направленных антенн. Поскольку именно такие антенны используются в радиорелейной связи, то несложно сделать вывод о том, что по сути сети МБС должны максимально использовать радиорелейный принцип передачи данных. Однако такое его использование предполагается на качественно новой основе, с учетом возможностей, предоставляемых технологиями цифровых антенных решеток (ЦАР), о сути которых подробно речь пойдет в четвертом разделе.

Принципиально важной является необходимость реализации с помощью таких антенных систем одновременной связи как с наземными абонентами, так и с воздушными ретрансляторами, размещенными на БПЛА. В результате, за счет появления трехмерных альтернативных и независимых маршрутов передачи может быть повышена надежность связи между МБС в пределах одной зоны. Именно такой эффект используется в системах MIMO, правда за счет пассивных переотражений от естественных предметов, а не активной ретрансляции с помощью БПЛА (рис. 1.7).

MIMO-технология коммуникаций имеет значительный потенциал для увеличения спектральной эффективности передачи дан-

ных при рассеянии сигналов в окружающей среде, соответствующей городским тактическим сценариям. Хотя выигрыш не столь велик, как это предвещали ранние, оптимистичные пространственно-некоррелированные модели каналов передачи, спектральная эффективность увеличивается почти линейно с ростом числа элементов антенн.

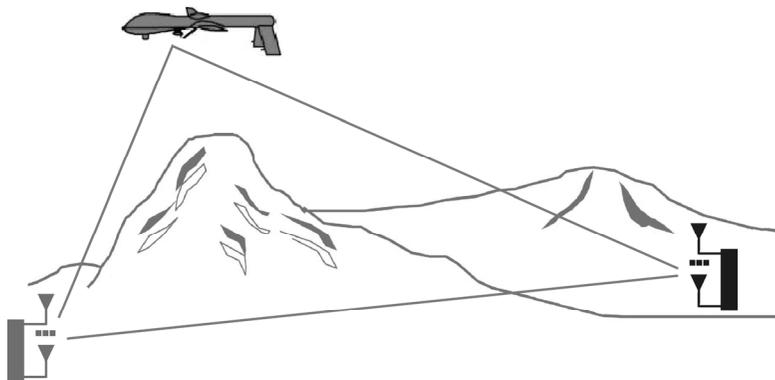


Рис. 1.7. Вариант реализации системы MIMO с помощью БПЛА

Дальнейшее развитие беспроводных технологий предусматривает интеграцию сетей MANET в качестве составной части гибридных сетей связи четвертого поколения (4G). Дело в том, что опережающее развитие коммерческих сетей и необходимость сокращения бюджетных ассигнований в оборонной сфере ставят на повестку дня в развитых странах мира вопрос внедрения гражданских коммуникационных технологий в военную область. Однако, анализ существующих стандартов и протоколов сотовой и транкинговой связи, беспроводных локальных сетей показывает, что их непосредственное применение в тактических системах военной связи было бы крайне неэффективным. Основная причина этого в ориентации гражданских систем на детерминированную структуру сетей, стационарные базовые станции, не приспособленные к обслуживанию сетей с динамической топологией. По-

этому главное отличие нынешнего этапа в развитии тактических коммуникаций состоит преимущественно в усовершенствовании методов, используемых в гражданских системах, путем адаптации коммерческих стандартов под нужды тактической связи и поиск новых путей построения их физической основы с учетом уникальных характеристик военной инфраструктуры.

### *Синтез физического уровня систем связи на основе многопользовательской технологии ММО*

Система с тремя и более абонентами, в которой организуется связь с использованием технологии ММО (“множественный вход – множественный выход”), как известно, называется многопользовательской системой ММО (Multi User ММО) [41] либо мульти-ММО системой. В режиме поочередного излучения абонентами сигналов при их обработке в приемных сегментах мульти-ММО каналов связи можно использовать обычные методы декодирования, поскольку многопользовательская система фактически вырождается в набор однопользовательских. При одновременном же выходе в эфир нескольких абонентов могут применяться известные схемы кодирования сигналов, но более высокой степени иерархии либо алгоритмы обработки, основанные на проверке гипотез о количестве одновременно излучающих многоантенных терминалов.

Для рассмотрения модели описания мульти-ММО системы связи в процессе ее синтеза и анализа необходимо ввести дополнительные ограничения и обозначения. Уточним, что далее будет рассматриваться такая система ММО, в которой осуществляется одновременная обработка сигналов нескольких разнесенных в пространстве ММО систем. Основным условием при этом остается стационарность среды распространения радиоволн на интервале времени с момента измерения передаточных характеристик каналов ММО до завершения передачи по ним информационных блоков.

В простейшем случае можно полагать, что количество передающих антенн не больше количества приемных ( $M \leq N$ ), что позволяет получить скорости передачи информации, близкие к предельным, без адаптации, т. е., при неизвестных в передатчике параметрах канала. Однако в случае многопользовательской ММО системы указанное ограничение  $M \leq N$  является излишним и далее применяться не будет.

Запишем матричные выражения отклика приемной цифровой антенной решетки (ЦАР) в составе элементарной ММО-станции связи с двумя антенными элементами при обработке OFDM сигналов с квадратурной амплитудной модуляцией (QAM), излученных одновременно парой абонентских терминалов ММО. Предположим, что абонентские устройства также имеют в своем составе передающие ЦАР из двух антенных элементов.

Введем следующие обозначения:  $u_{i,j}$  – напряжения по выходу  $i$ -го приемного канала в  $j$ -й момент времени;  $h_{kpm,j}$  – передаточная характеристика канала ММО между  $p$ -й антенной  $k$ -го абонента и  $m$ -й приемной антенной в  $j$ -й момент времени;  $A_{kp}$  – амплитуда сигнала, который излучается  $p$ -й антенной  $k$ -го абонента;  $n_{i,j}$  – напряжение шума на выходе  $i$ -го приемного канала в  $j$ -й момент времени (все индексные переменные ( $k, p, m, i, j$ ) могут принимать значения 1 или 2). Тогда система уравнений, описывающая отклик приемной ЦАР, будет иметь вид

$$\begin{cases} u_{1,i} = h_{111,i} A_{11} + h_{121,i} A_{12} + h_{211,i} A_{21} + h_{221,i} A_{22} + n_{1,i}; \\ u_{1,i+1} = h_{111,i+1} A_{11} + h_{121,i+1} A_{12} + h_{211,i+1} A_{21} + h_{221,i+1} A_{22} + n_{1,i+1}; \\ u_{2,i} = h_{112,i} A_{11} + h_{122,i} A_{12} + h_{212,i} A_{21} + h_{222,i} A_{22} + n_{2,i}; \\ u_{2,i+1} = h_{112,i+1} A_{11} + h_{122,i+1} A_{12} + h_{212,i+1} A_{21} + h_{222,i+1} A_{22} + n_{2,i+1}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Строки этой системы соответствуют напряжениям по выходам двух приемных каналов ЦАР в паре последовательных отсчетов времени, что обеспечивает возможность решения системы уравнений, в которой искомыми неизвестными являются элементы

вектора комплексных амплитуд  $A$  ( $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ ). Запишем систему (1.1) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{1,i+1} \\ u_{2,i} \\ u_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{111,i} & h_{121,i} & | & h_{211,i} & h_{221,i} \\ h_{111,i+1} & h_{121,i+1} & | & h_{211,i+1} & h_{221,i+1} \\ h_{112,i} & h_{122,i} & | & h_{212,i} & h_{222,i} \\ h_{112,i+1} & h_{122,i+1} & | & h_{212,i+1} & h_{222,i+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{1,i} \\ n_{1,i+1} \\ n_{2,i} \\ n_{2,i+1} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

или компактно

$$U = H \cdot A + N, \quad (1.3)$$

где  $U = \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{1,i+1} \\ u_{2,i} \\ u_{2,i+1} \end{bmatrix}$  – вектор комплексных напряжений по выходам

приемных каналов ЦАР;

$$H = \begin{bmatrix} h_{111,i} & h_{121,i} & | & h_{211,i} & h_{221,i} \\ h_{111,i+1} & h_{121,i+1} & | & h_{211,i+1} & h_{221,i+1} \\ h_{112,i} & h_{122,i} & | & h_{212,i} & h_{222,i} \\ h_{112,i+1} & h_{122,i+1} & | & h_{212,i+1} & h_{222,i+1} \end{bmatrix} \quad \text{– матрица обобщенных}$$

характеристик передачи каналов связи;

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{– вектор амплитуд сигналов; } n = \begin{bmatrix} n_{1,i} \\ n_{1,i+1} \\ n_{2,i} \\ n_{2,i+1} \end{bmatrix} \quad \text{– вектор на-}$$

пряжений аддитивных шумов.

Важно отметить, что выражение (1.3) остается неизменным при произвольной размерности системы ММО, что позволяет выполнять на его основе унифицированные операции модуляции и демодуляции сигналов ММО в матричном виде.

Дальнейшая обработка сигналов в приемной ЦАР зависит от выбранного метода кодирования сигналов. Для решения задачи разделения и оценки информационных параметров  $M$  излученных сигналов необходимо решить систему из  $N$  уравнений с  $M$  неизвестными. При  $N=M$  можно воспользоваться матрицей, обратной матрице характеристик канала, и оценить вектор переданных сигналов по формуле

$$\hat{A} = H^{-1}U. \quad (1.4)$$

При  $N > M$  целесообразно применить обобщенную инверсию, которая получается из решения системы уравнений по методу наименьших квадратов (MMSE, Minimum Mean-Square Error)

$$\hat{A} = H^H (HH^H)^{-1}U. \quad (1.5)$$

Организованная таким образом ММО-система связи обеспечивает передачу информации по  $M$  пространственным каналам. Причем все каналы работают в одной и той же полосе частот и разделяются только за счет пространственного разнесения излучающих и приемных антенн.

Следует отметить, что в выражениях (1.2), (1.3) строки матрицы  $H$  соответствуют временным отсчетам, а блоки – номеру абонента. Т. е., в первой строке матрицы  $H$  в левом блоке стоят передаточные характеристики первой и второй антенн первого абонента для первого приемного канала ЦАР в первом временном отсчете.

Аналогичным образом могут быть получены аналитические модели мульти-ММО системы более сложной структуры. Например, для модели мульти-ММО системы с тремя абонентами, каждый из которых использует ЦАР с двумя антенными элементами, система (1.2) на приемной стороне запишется в виде

$$\begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{1,i+1} \\ u_{1,i+2} \\ u_{2,i} \\ u_{2,i+1} \\ u_{2,i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{111,i} & h_{121,i} & \vdots & h_{211,i} & h_{221,i} & \vdots & h_{311,i} & h_{321,i} \\ h_{111,i+1} & h_{121,i+1} & \vdots & h_{211,i+1} & h_{221,i+1} & \vdots & h_{311,i+1} & h_{321,i+1} \\ h_{111,i+2} & h_{121,i+2} & \vdots & h_{211,i+2} & h_{221,i+2} & \vdots & h_{311,i+2} & h_{321,i+2} \\ h_{112,i} & h_{122,i} & \vdots & h_{212,i} & h_{222,i} & \vdots & h_{312,i} & h_{322,i} \\ h_{112,i+1} & h_{122,i+1} & \vdots & h_{212,i+1} & h_{222,i+1} & \vdots & h_{312,i+1} & h_{322,i+1} \\ h_{112,i+2} & h_{122,i+2} & \vdots & h_{212,i+2} & h_{222,i+2} & \vdots & h_{312,i+2} & h_{322,i+2} \end{bmatrix} \times \quad (1.6)$$

$$\times \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{31} \\ A_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{1,i} \\ n_{1,i+1} \\ n_{1,i+2} \\ n_{2,i} \\ n_{2,i+1} \\ n_{2,i+2} \end{bmatrix}$$

Из (1.6) видно, что в этом случае для обеспечения возможности решения системы необходимо ввести третий дополнительный параметр времени.

Обобщим систему (1.2) для случая работы с двухэлементными ЦАР  $p$  абонентов в мульти-MIMO системе:

$$\begin{bmatrix} u_{1,i} \\ \dots \\ u_{1,i+p-1} \\ u_{2,i} \\ \dots \\ u_{2,i+p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{111,i} & h_{121,i} & \vdots & h_{p11,i} & h_{p21,i} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ h_{111,i+p-1} & h_{121,i+p-1} & \dots & h_{p11,i+p-1} & h_{p21,i+p-1} \\ h_{112,i} & h_{122,i} & \vdots & h_{p12,i} & h_{p22,i} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ h_{112,i+p-1} & h_{122,i+p-1} & \vdots & h_{p12,i+p-1} & h_{p22,i+p-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \dots \\ A_{p1} \\ A_{p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{1,i} \\ \dots \\ n_{1,i+p-1} \\ n_{2,i} \\ \dots \\ n_{2,i+p-1} \end{bmatrix}$$

Приведенная ранее матричная запись (1.3) является довольно общей, и для описания различных алгоритмов кодирования в ней необходимо конкретизировать элементы матрицы  $H$ . Например, для кодирования по методу “магического квадрата” с поочередным излучением одинаковых сигналов разными передающими элементами по схеме  $2 \times 2$  матрица  $H$  будет иметь структуру

$$H = \left[ \begin{array}{cc|cc} h_{121,i} & h_{111,i} & h_{221,i} & h_{211,i} \\ h_{111,i+1} & h_{121,i+1} & h_{211,i+1} & h_{221,i+1} \\ h_{122,i} & h_{112,i} & h_{222,i} & h_{212,i} \\ h_{112,i+1} & h_{122,i+1} & h_{212,i+1} & h_{222,i+1} \end{array} \right].$$

В этом случае схема распределения передаваемых сигналов свелась, фактически, к поочередному излучению через две антенны каждого передатчика.

В случае ориентации на кодирование Аламоути [63] возможно подвергнуть модификации вектор амплитуд сигналов, положив в нем  $A_{21} = A_{11}^*$  и  $A_{22} = -A_{12}^*$ . Таким образом, вектор  $A$  будет иметь вид

$$A = [A_{11} \quad A_{12} \quad A_{11}^* \quad -A_{12}^*]^T, \quad (1.7)$$

а матрица  $H$  останется в виде, представленном в системе (1.6). Однако в ряде случаев, например, при анализе предельных возможностей пространственного уплотнения каналов связи, целесообразно вектор амплитуд оставлять неизменным, а адаптации подвергать элементы матрицы  $H$ . При этом для указанного варианта кодирования по схеме Аламоути следует записать:

$$H = \left[ \begin{array}{cc|cc} h_{121,i} & h_{111,i} & h_{221,i} & h_{211,i} \\ h_{111,i+1}^* & -h_{121,i+1}^* & h_{211,i+1}^* & -h_{221,i+1}^* \\ h_{122,i} & h_{112,i} & h_{222,i} & h_{212,i} \\ h_{112,i+1}^* & -h_{122,i+1}^* & h_{212,i+1}^* & -h_{222,i+1}^* \end{array} \right]. \quad (1.8)$$

Если приемная антенна имеет 4 канала, то в таком варианте рассмотренной системы мульти-ММО возможно осуществлять оценивание четырехкомпонентного вектора комплексных амплитуд сигналов за один отсчет времени. В результате можно пренебречь временным измерением системы (1.6), переписав ее в виде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{111} & h_{121} & h_{211} & h_{221} \\ h_{112} & h_{122} & h_{212} & h_{222} \\ h_{113} & h_{123} & h_{213} & h_{223} \\ h_{114} & h_{124} & h_{214} & h_{224} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Следует отметить, что для одноотсчетных измерений на приемном сегменте количество антенных элементов должно быть равно количеству одновременно излучающих в эфир передающих каналов. Для повышения канальной емкости мульти-ММО системы целесообразно использовать плоские приемные ЦАР, в сочетании с временным, частотным и поляризационным разделением сигналов.

Необходимо отметить, что основным преимуществом представленного подхода к пространственно-временной обработке сигналов в мульти-ММО системе является обобщение формул обработки сигналов на выходах приемных каналов, что обеспечивает инвариантность используемого метода демодуляции к выбранному алгоритму кодирования. Рассмотренный вариант формализации физического уровня модели многопользовательской сети ММО является основой для последующей оценки ее предельных возможностей по точности демодуляции сигналов в зависимости от количества одновременно находящихся на связи абонентских терминалов.

## *Модель отклика системы мульти-ММО с учетом пространственной избирательности линейной ЦАР*

При аналитическом описании откликов систем ММО и мульти-ММО обычно используют матрицу  $H$  характеристик передачи каналов связи. Однако для реализации алгоритмов помехозащиты на основе процедуры цифрового диаграммообразования целесообразно выделить в упомянутой матрице характеристик передачи детерминированную составляющую, описывающую диаграммы направленности пространственных каналов. Как отмечено в [54], это позволяет на этапе вхождения в связь определить угловые координаты источников помех, а также сформировать «нули» диаграммы направленности ЦАР в направлениях прихода мешающих сигналов. Опираясь на данный подход, можно реализовать также двухэтапную процедуру помехозащищенной демодуляции OFDM (N-OFDM) сигналов [54] в рамках технологии мульти-ММО-систем.

В любом из указанных случаев интерес представляет исследование зависимости предельных возможностей частотного уплотнения OFDM (N-OFDM) сигналов от пространственного разнесения направлений их прихода. С этой целью получим аналитическое представление отклика линейной ЦАР, используемой в приемном сегменте системы мульти-ММО. Следуя [54], для описания отклика удобно применить матричную запись (1.3).

Для упрощения аналитических выкладок при разработке модели отклика линейной ЦАР в системе мульти-ММО необходимо ввести следующие ограничения.

В качестве базовой антенны ММО будем рассматривать эквидистантную ЦАР в режиме работы на прием с  $R$  ненаправленными антенными элементами, расположенными с шагом  $d$ . Фазовый центр ЦАР совпадает с ее геометрическим центром, который принят за начало координат.

Будем считать, что коэффициенты передачи, учитывающие затухание и искажение сигналов при их распространении по

трассе от передающих антенн до приемных каналов, одинаковые и равняются единице; АЧХ приемных каналов ЦАР имеют форму, близкую к прямоугольной; собственные шумы на выходах этих каналов некоррелированные с сигналами, статистически независимые и имеют одинаковую дисперсию. Кроме того, предположим, что плотности вероятностей мгновенных значений собственных шумов решетки распределены по нормальному закону, ширина спектра источника излучения шумовых сигналов существенно превышает полосу пропускания каналов; интервал корреляции сигналов на выходах приемных каналов решетки, соответствующих одному и тому же корреспонденту, значительно превышает максимальное время задержки по каналам решетки.

Действующий на ЦАР сигнал является узкополосным в пространственно-временном понимании, т. е. интервал корреляции комплексной огибающей сигнала существенно превышает временной интервал между моментами прихода сигнала в наиболее разнесенных точках апертуры решетки.

Предположим, что на ЦАР воздействуют  $M$  сигналов ( $M \leq R_x$ ), причем  $m$ -ому сигналу ( $m = \overline{1, M}$ ) соответствует волна с плоским фронтом, которая поступает на полотно антенной решетки с направления  $x_m$  ( $x_m$  – угол между нормалью в начале координат и направлением прихода сигнала). В качестве ограничения также рассматривается ситуация однокоординатной угловой оценки.

Тогда аналитическая модель отклика антенной системы ММО на базе ЦАР в отдельно взятом временном отсчете при одномомерном измерении направлений прихода сигналов в матричном виде без учета шумов примет форму

$$U = PA, \quad (1.10)$$

$$\text{где } P = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \cdots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \cdots & Q_2(x_M) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ Q_{R_x}(x_1) & Q_{R_x}(x_2) & \cdots & Q_{R_x}(x_M) \end{bmatrix};$$

$U$  – вектор комплексных напряжений приемных каналов ЦАР;  $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M]^T$  – вектор комплексных амплитуд  $M$  сигналов;  $P$  – матрица  $R$  комплексных диаграмм направленности (ДН) приемных антенных элементов в направлениях  $M$  сигналов;  $x_m$  – оценка направления прихода  $m$ -го сигнала;  $M$  – количество сигналов;  $R_X$  – количество каналов ЦАР.

В общем случае элементы матрицы  $P$  могут представлять собой произведения ДН антенных элементов и передаточных характеристик (ПХ) приемных каналов.

Информация об угловых координатах излучателей (переизлучателей) сигналов должна быть получена на этапе вхождения в связь перед каждым новым сеансом передачи данных. Для этого могут использоваться известные в радиолокации методы много-сигнальной пеленгации со сверхразрешением источников излучения.

Сформулируем отклик рассмотренной ЦАР с учетом влияния аддитивного шума

$$U = PA + n, \quad (1.11)$$

где  $n$  – вектор аддитивного шума.

Представим предложенный подход для реализации системы мульти-ММО с приемной 4-канальной ЦАР на базовой станции и двумя абонентами, использующими терминалы с 2-канальными ЦАР. Тогда система (1.11) запишется в виде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(x_{11}) & Q_1(x_{12}) & Q_1(x_{21}) & Q_1(x_{22}) \\ Q_2(x_{11}) & Q_2(x_{12}) & Q_2(x_{21}) & Q_2(x_{22}) \\ Q_3(x_{11}) & Q_3(x_{12}) & Q_3(x_{21}) & Q_3(x_{22}) \\ Q_4(x_{11}) & Q_4(x_{12}) & Q_4(x_{21}) & Q_4(x_{22}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

где  $u_k$  – напряжения по выходу  $k$ -го приемного канала;

$Q_k(x_{pm})$  – комплексная ДН  $k$ -го канала;  $x_{pm}$  – оценка угловой координаты, характеризующей направление прихода  $m$ -го сигнала  $p$ -го абонента относительно нормали к плоскости ЦАР;  $A_{sp}$  – комплексная амплитуда сигнала, который излучается  $s$ -й антенной  $p$ -го абонента;  $n_k$  – напряжение шума на выходе  $k$ -го приемного канала.

Обобщение системы уравнений (1.12) для случая работы с  $p$  абонентскими терминалами, оснащенными двухэлементными ЦАР, в серии последовательных моментов времени в многопользовательской ММО системе будет иметь вид, учитывающий дополнительно порядковый номер временного отсчета  $i$ :

$$\begin{bmatrix} u_{1,i} \\ \dots \\ u_{1,i+p-1} \\ u_{2,i} \\ \dots \\ u_{2,i+p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1,i}(x_{11}) & Q_{1,i}(x_{12}) & \dots & Q_{1,i}(x_{p1}) & Q_{1,i}(x_{p2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{1,i+p-1}(x_{11}) & Q_{1,i+p-1}(x_{12}) & \dots & Q_{1,i+p-1}(x_{p1}) & Q_{1,i+p-1}(x_{p2}) \\ Q_{2,i}(x_{11}) & Q_{2,i}(x_{12}) & \dots & Q_{2,i}(x_{p1}) & Q_{2,i}(x_{p2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{2,i+p-1}(x_{11}) & Q_{2,i+p-1}(x_{12}) & \dots & Q_{2,i+p-1}(x_{p1}) & Q_{2,i+p-1}(x_{p2}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{p1} \\ A_{p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{1,i} \\ \dots \\ n_{1,i+p-1} \\ n_{2,i} \\ \dots \\ n_{2,i+p-1} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Матричные записи (1.12) и (1.13) соответствуют (1.11). Они остаются в силе и в случае, когда в линейной ЦАР применяется цифровое формирование вторичных пространственных лучей. При этом элементы сигнальных матриц  $Q_k(x_{pm})$  соответствуют

диаграммам направленности вторичных пространственных каналов.

В общем случае неидентичных коэффициентов передачи сигналов от передающих антенн до приемных каналов для описания вектора напряжений по выходу приемной линейной ЦАР, используемой в рамках технологии ММО-систем, удобно применить матричное представление в виде

$$U = HA + N, \quad (1.14)$$

$$\text{где } H = Q \circ \tilde{H} = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{R_x}(x_1) & \cdots & Q_{R_x}(x_M) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \cdots & \tilde{h}_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{R_x,1} & \cdots & \tilde{h}_{R_x,M} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_1(x_1) \cdot \tilde{h}_{11} & \cdots & Q_1(x_M) \cdot \tilde{h}_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{R_x}(x_1) \cdot \tilde{h}_{R_x,1} & \cdots & Q_{R_x}(x_M) \cdot \tilde{h}_{R_x,M} \end{bmatrix};$$

“ $\circ$ ” – поэлементное произведение Адамара;  $\tilde{h}_{j,i}$  – передаточная характеристика канала ММО;  $Q_r(x_{pm})$  – ДН  $r$ -го антенного элемента или вторичного пространственного канала ЦАР в направлении обобщенной угловой координаты  $x_{pm}$ .

Представление отклика линейной ЦАР в виде (1.14) позволяет вычленить детерминированную компоненту в передаточной характеристике канала ММО и учесть матрицу ММО-канала, что обеспечивает возможность избирательно исследовать влияние пространственного уплотнения каналов связи на качество передачи данных. В этом случае элементы матрицы  $H$  описывают передаточные характеристики канала связи, включая амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) приемных каналов ЦАР и цифровых средств фильтрации сигналов.

При использовании в приемной сегменте многопользовательской системы ММО не линейной, а, например, плоской ЦАР необходимо проводить многомерное измерение направлений прихода  $M$  сигналов. Рассмотрим плоскую ЦАР типичной структуры, состоящую из идентичных однонаправленных антенных элементов, расположенных в  $R_x$  столбцах и  $R_y$  рядах с расстояниями  $d_x$  по горизонтали и  $d_y$  – по вертикали. Будем считать, что  $R_x = R_y$ , и в дополнение к рассмотренным ограничениям для линейной ЦАР, предположим, что диаграммы направленности антенных элементов факторизуемы, то есть могут быть представлены в виде произведения значений ДН в двух плоскостях.

Отклик плоской ЦАР для варианта 2-координатной процедуры можно оценить с помощью “натягивания” вектора  $A$  комплексных амплитуд  $M$  сигналов на диагональ единичной матрицы  $A = \text{diag}[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M]$ . Согласно разделу 1, аналитическая модель отклика плоской решетки на основе традиционных матричных операций при одноотсчетном измерении направления на  $M$  сигналов и факторизуемых ДН имеет вид

$$U = GAP^T, \quad (1.15)$$

где  $A = \text{diag}[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M]$ ,  $G$  и  $P$  – матрицы ПХ каналов ЦАР в направлениях  $M$  сигналов, соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях,

$$P = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \dots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \dots & Q_2(x_M) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ Q_{R_x}(x_1) & Q_{R_x}(x_2) & \dots & Q_{R_x}(x_M) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} Q_1(y_1) & Q_1(y_2) & \dots & Q_1(y_M) \\ Q_2(y_1) & Q_2(y_2) & \dots & Q_2(y_M) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ Q_{R_y}(y_1) & Q_{R_y}(y_2) & \dots & Q_{R_y}(y_M) \end{bmatrix}.$$

С учетом влияния шумов (1.15) можно записать в виде

$$U = GAP^T + n. \quad (1.16)$$

С увеличением размерности, например, за счет учета АЧХ БПФ фильтров, формализация указанной модели сигналов существенно усложняется, что влияет на возможность ее практического использования. В этом случае необходимо применять рассмотренный в разделе 1 матричный аппарат семейства торцевых произведений матриц. Это сократит объем операций при перемножении диагональной матрицы  $A$  на матрицу  $P$ . В частности, отклик плоской ЦАР в случае факторизуемых ДН и выполнения в одном отсчете времени 2-координатных измерений (например, по двум углам) без учета шумов можно представить аналогично линейной ЦАР

$$U = PA, \quad (1.17)$$

где  $P = Q_V \square (Q_H)^H$ ,  $A$  – вектор оценок комплексных амплитуд  $M$  сигналов;  $U$  – блок-вектор комплексных напряжений приемных каналов ЦАР;  $Q_V$ ,  $Q_H$  – матрицы ДН антенных элементов ЦАР, соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях,

$$Q_H = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \cdots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \cdots & Q_2(x_M) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ Q_{R_x}(x_1) & Q_{R_x}(x_2) & \cdots & Q_{R_x}(x_M) \end{bmatrix}; \quad Q_V = \begin{bmatrix} Q_1(y_1) & Q_1(y_2) & \cdots & Q_1(y_M) \\ Q_2(y_1) & Q_2(y_2) & \cdots & Q_2(y_M) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ Q_{R_y}(y_1) & Q_{R_y}(y_2) & \cdots & Q_{R_y}(y_M) \end{bmatrix};$$

$x_m, y_m$  – угловые координаты направления прихода  $m$ -го сигнала по вертикали и горизонтали;  $R_y, R_x$  – количество пространственных каналов плоской ЦАР соответственно по вертикали и горизонтали;  $M$  – количество сигналов; “ $\square$ ” – операция торцевого произведения матриц (см. раздел 4).

В качестве альтернативного варианта возможно использовать представление матрицы  $P$  через операцию произведения Хатри-Рао (см. раздел 4):

$$P = Q_V \blacksquare Q_H. \quad (1.18)$$

Отклик антенной решетки можно обобщить на случай трех, четырех и больше параметров без потери общности путем изменения только матрицы  $P$ . Это упрощает применение и согласование известных однокоординатных процедур в более сложных задачах.

Аналогично (1.14) можно представить выражение для сигнального отклика плоской ЦАР, учитывающее особенности распространения сигналов. В этом случае матрица  $H$  видоизменится с учетом второй угловой координаты. В случае факторизуемых ДН при формировании  $H$  следует применять произведение Хатри–Рао для матриц характеристик направленности каналов ЦАР в вертикальной  $Q_V$  и горизонтальной плоскостях  $Q_H$

$$H = (Q_V \circ \tilde{H}_V) \blacksquare (Q_H \circ \tilde{H}_H), \quad (1.19)$$

где  $\tilde{H}_V$ ,  $\tilde{H}_H$  – матрицы передаточных характеристик канала ММО в вертикальном и горизонтальном сечениях трассы распространения сигналов.

### *Особенности обработки OFDM и N-OFDM сигналов*

Использование метода ортогонального частотного дискретного мультиплексирования (OFDM), а также его обобщения в виде неортогональной частотной дискретной модуляции (N-OFDM) [57] в совокупности с технологией ММО может рассматриваться в качестве одной из ключевых особенностей концепции построения перспективных комплексов связи. Остановимся более подробно на аналитическом описании метода N-OFDM в сочетании с ММО-подходом.

При условии воздействия на фильтр БПФ множества сигналов от  $M$  источников, запишем напряжение на выходе  $n$ -го фильтра приемного элемента ЦАР без учета шумов и фазовых искажений, присутствующих БПФ

$$\dot{U}_n = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m f_n(w_m), \quad (1.20)$$

где  $\dot{a}_m$  – комплексная амплитуда  $m$ -го сигнала;  $f_n(w_m)$  – АЧХ  $n$ -го фильтра.

Если сформировать  $N$  ортогональных фильтров, то напряжения на их выходах без учета шумов будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m f_1(w_m); \\ \dot{U}_2 = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m f_2(w_m); \\ \vdots \\ \dot{U}_N = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m f_N(w_m). \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Переходя на квадратурные составляющие, систему (1.21) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^{c(s)} = \sum_{m=1}^M a_m^{c(s)} f_1(w_m); \\ U_2^{c(s)} = \sum_{m=1}^M a_m^{c(s)} f_2(w_m); \\ \vdots \\ U_N^{c(s)} = \sum_{m=1}^M a_m^{c(s)} f_N(w_m). \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Таким образом, решив систему (1.22), можно найти амплитуды сигналов с точностью до фазовых искажений процедуры БПФ при условии  $N \geq M$ .

С учетом влияния шумов, действующих в приемных каналах ЦАР ММО-системы, для синтеза процедуры обработки сигналов

следует воспользоваться методом наименьших квадратов. Опираясь на (1.22), функцию невязок можно записать в виде

$$L = \sum_{r=1}^S \left\{ U_r^C - \sum_{m=1}^M a_m^C f_r(w_m) \right\}^2 + \sum_{r=1}^S \left\{ U_r^S - \sum_{m=1}^M a_m^S f_r(w_m) \right\}^2 = \min, \quad (1.23)$$

где  $U_j^{c(s)}$  – квадратурные составляющие комплексного значения отклика  $j$ -го БПФ-фильтра;  $S$  – количество точек операции БПФ;  $\omega_m$  – радиальные частоты из множества заданных.

В этом случае, для нахождения квадратурных составляющих амплитуд сигналов необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a_n^C} = \sum_{r=1}^S 2 \left\{ U_r^C - \sum_{m=1}^M a_m^C f_r(w_m) \right\} f_r(w_n) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial a_n^S} = \sum_{r=1}^S 2 \left\{ U_r^S - \sum_{m=1}^M a_m^S f_r(w_m) \right\} f_r(w_n) = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Учитывая, что  $\sum_{r=1}^S f_r^2(w) = S^2$  и обозначив  $\sum_{r=1}^S f_r(w_n) f_r(w_m) = f_{nm}$ , запишем главный определитель системы (1.24)

$$\det = \begin{bmatrix} S^2 & f_{12} & \cdots & f_{1M} \\ f_{21} & S^2 & \cdots & f_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & S^2 \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

где  $f_{nm} = \left[ \sin \frac{S}{2} \left( \frac{2\pi n}{S} - w_m \Delta t \right) \right] \cdot \left[ \sin \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi n}{S} - w_m \Delta t \right) \right]^{-1}$  – значение

АЧХ синтезированных путем БПФ частотных фильтров. Тогда в общем случае  $M$  сигналов решением (1.24) будут являться оценки [57]

$$a_m^{c(s)} = \frac{\det_m^{c(s)}}{\det}; \quad m=1,2, \dots, M,$$

где  $\det_m^{c(s)}$  – частный определитель, полученный из  $\det$  путем замены соответствующего столбца вектором свободных членов  $[G^{c(s)}]$ , причем

$$[G^{c(s)}] = [U_1^{c(s)} \quad U_2^{c(s)} \quad U_3^{c(s)} \quad \dots \quad U_M^{c(s)}]^T.$$

Согласно [57], существенным отличием метода N-OFDM от OFDM является возможность расстановки частот несущих сигналов на ширину меньшую, чем предусматривает синтезированный частотный фильтр БПФ. Для повышения пропускной способности системы связи дополнительно к пространственно-временному кодированию уместно использовать амплитудно-фазовое кодирование несущих.

Опираясь на приведенные выкладки, далее можно записать отклики линейной и плоской ЦАР по выходам  $R$  БПФ-фильтров, синтезированных по отсчетам АЦП, при условии, что с каждого из  $M$  угловых направлений приходит одночастотный сигнал. При этом совокупный многочастотный сигнал можно рассматривать как пакет из N-OFDM поднесущих, суммарное напряжение которых по выходу ЦАР можно записать в виде:

а) линейная антенная решетка

$$U = [(Q \circ \tilde{H}) \blacksquare F]A, \quad (1.26)$$

где  $Q$  – матрица ДН приемных каналов, соответствующая, на-

пример, выражению (1.14), то есть  $Q = \begin{bmatrix} Q_l(x_1) & \dots & Q_l(x_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{R_x}(x_1) & \dots & Q_{R_x}(x_M) \end{bmatrix};$

$F$  – матрица АЧХ БПФ фильтров для  $M$  радиальных частот поднесущих;

$$F = \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & \cdots & F_1(\omega_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_R(\omega_1) & \cdots & F_R(\omega_M) \end{bmatrix};$$

б) плоская антенная решетка

$$U = [[(Q_V \circ \tilde{H}_V) \blacksquare (Q_H \circ \tilde{H}_H)] \blacksquare F]A. \quad (1.27)$$

Таким образом, в выражениях (1.26) и (1.27) матрица  $H$  имеет вид  $H = (Q \circ \tilde{H}) \blacksquare F$  и  $H = [(Q_V \circ \tilde{H}_V) \blacksquare (Q_H \circ \tilde{H}_H)] \blacksquare F$  соответственно.

Опираясь на указанные матричные формы представления сигналов, можно получить компактную запись алгоритмов обработки выходных напряжений приемных каналов ЦАР.

В случае дополнительного стробирования отсчетов АЦП и линейной решетки вектор напряжений откликов ЦАР на совокупность одночастотных сигналов можно выразить в бесшумовом виде

$$U = [[(Q \circ \tilde{H}) \blacksquare \Theta] \blacksquare F]A, \quad (1.28)$$

где в случае мульти-ММО режима

$$\Theta = [\theta_1(f_1) \quad \cdots \quad \theta_1(f_M) \quad | \quad \cdots \quad | \quad \theta_P(f_1) \quad \cdots \quad \theta_P(f_M)] -$$

блочная вектор-строка ненормированных АЧХ цифровых фильтров дополнительного стробирования на частотах поднесущих сигналов от  $P$  корреспондентских станций (при условии одинаковых частот поднесущих всех станций).

Аналогично, для плоской ЦАР получим

$$U = [[[[Q_V \circ \tilde{H}_V) \blacksquare (Q_H \circ \tilde{H}_H)] \blacksquare \Theta] \blacksquare F]A. \quad (1.29)$$

Соотношения (1.28) и (1.29) отличаются тем, что в них из матрицы, описывающей характеристики канала распространения, вычленены детерминированные компоненты в виде ДН антенных

элементов или вторичных пространственных каналов  $(Q_V; Q_H)$ , АЧХ БПФ фильтров  $(V)$  и АЧХ цифровых фильтров дополнительного стробирования  $(\Theta)$ . Такой методический прием позволит анализировать влияние этих детерминированных компонент на потенциальную точность оценивания амплитуд сигналов.

Следует отметить, что матрицы  $\tilde{H}, \tilde{H}_H, \tilde{H}_V$  по-прежнему могут учитывать как характеристики распространения сигналов, так и тот или иной метод их кодирования. При этом в режиме мульти-ММО они имеют блочную структуру.

Что касается демодуляции сигналов для оценивания их комплексных амплитуд, то соответствующая процедура отличается от (1.7) использованием вместо матрицы  $H$  соответствующей сигнальной матрицы  $[(Q \circ \tilde{H}) \blacksquare \Theta] \blacksquare F$  для линейной решетки или  $[(Q_V \circ \tilde{H}_V) \blacksquare (Q_H \circ \tilde{H}_H)] \blacksquare \Theta \blacksquare F$  – для плоской ЦАР. Полученные значения амплитудных составляющих сигналов далее следует сопоставить с созвездием QAM-модуляции и тем самым в результате восстановить переданное сообщение.

При рассмотрении задачи пространственно-частотного кодирования, когда с каждого углового направления приходит многочастотный пакет сигналов и номиналы частот поднесущих для каждого из них являются разными, матрицу  $H$  можно представить в виде

$$H = \tilde{H} \circ (Q[\otimes]F), \quad (1.30)$$

где  $\tilde{H}$  – матрица характеристик передачи трассы распространения сигналов соответствующих поднесущих;  $Q$  – матрица значений диаграмм направленности вторичных пространственных каналов приема;  $F$  – матрица амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) синтезированных в результате быстрого преобразования Фурье (БПФ) частотных фильтров; “ $\circ$ ” – поэлементное произведение Адамара;  $[\otimes]$  – блочное прямое произведение матриц.

Блочное прямое произведение также может применяться в случае многопользовательской системы ММО (мульти-ММО), когда в пределах одного терминала все передающие антенны работают на одинаковом наборе поднесущих, но диапазоны частот на образующих беспроводную сеть терминалах разные. Если же частоты поднесущих всех передатчиков на терминалах множества пользователей одинаковы и с каждого углового направления приходят многочастотные пакеты с одинаковыми номиналами, то в выражении (1.30) следует применить прямое произведение матриц

$$H = \tilde{H} \circ (Q \otimes F). \quad (1.31)$$

При использовании плоской ЦАР с факторизуемыми диаграммами направленности соотношения (1.30), (1.31) могут быть переписаны в виде:

$$H = \tilde{H} \circ ((Q \blacksquare V) [\otimes] F), \quad (1.32)$$

$$H = \tilde{H} \circ ((Q \blacksquare V) \otimes F), \quad (1.33)$$

где  $\blacksquare$  – символ матричного произведения Хатри-Рао;  $Q$ ,  $V$  – матрицы факторизованных диаграмм направленности каналов ЦАР в вертикальной  $Q$  и горизонтальной плоскостях  $V$ ;

$$Q = \begin{bmatrix} Q_l(x_1) & Q_l(x_2) & \cdots & Q_l(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \cdots & Q_2(x_M) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \cdots & Q_R(x_M) \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \cdots & V_1(y_M) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \cdots & V_2(y_M) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ V_S(y_1) & V_S(y_2) & \cdots & V_S(y_M) \end{bmatrix}.$$

При этом следует привести в соответствие размерность матрицы  $\tilde{H}$ .

В случае выполнения в приемной ЦАР операции дополнительного стробирования отсчетов АЦП вектор напряжений откликов частотных фильтров БПФ на многочастотный пакет N-OFDM сигналов может быть получен, если сделать в соответствующие подстановки матрицы  $H$ :

а) линейная ЦАР

$$H = \tilde{H} \circ (Q[\otimes](Z \blacksquare F)), \quad (1.34)$$

где  $Z = [\theta_1(f_{11}) \ \dots \ \theta_1(f_{M1}) \ | \ \dots \ | \ \theta_P(f_{1P}) \ \dots \ \theta_P(f_{MP})]$  – блочная вектор-строка ненормированной АЧХ усовершенствованного цифрового фильтра дополнительного стробирования отсчетов АЦП на частотах поднесущих N-OFDM сигналов, приходящих от абонентских терминалов ММО;

$$H = \tilde{H} \circ (Q \otimes (Z \blacksquare F)), \quad (1.35)$$

б) плоская ЦАР

$$H = \tilde{H} \circ ((Q \blacksquare V)[\otimes](Z \blacksquare F)) \text{ или}$$

$$H = \tilde{H} \circ ((Q \blacksquare V) \otimes (Z \blacksquare F)). \quad (1.36)$$

Предлагаемая модель отклика ЦАР может быть использована для оценки качества функционирования системы мульти-ММО в различных ситуациях приема сигналов.

Реализацию рассмотренного способа связи с пространственно-временной обработкой сигналов на основе усовершенствованной технологии ММО следует дополнить описанием выбора гипотезы о количестве источников переотражения, что необходимо для формирования сигнальной матрицы. Дело в том, что на этапе вхождения приемной станции в связь в режиме работы мульти-ММО, следует провести оценку количества источников переотражений и оценить их угловые координаты. Такая задача решает-

ся обычно путем передачи корреспондентами сигналов, известных приемной стороне. Однако при числе источников, большем двух, необходимо выполнение операции отбора среди полученных оценок углового положения “горячих” точек их наиболее правдоподобных значений. Такая задача является типичным примером задач проверки гипотез.

Среди множества подходов к ее решению заслуживает внимания подход, используемый при определении количества источников. Для решения задачи вхождения в связь в рамках многопользовательской системы ММО соответствующие соотношения можно интерпретировать в виде:

$$F = (U - HA)^T (U - HA) = \min ; \quad (1.37)$$

$$F = U^T U - U^T HA - (HA)^T U + (HA)^T HA = \min ; \quad (1.38)$$

$$F(x_m) = \sum_{m=1}^M \{U^T HA_m + (HA_m)^T U\} = \max . \quad (1.39)$$

Задача проверки гипотез аналогично рассмотренной ранее радиолокационной задаче состоит в подстановке измеренных при различных структурах матрицы  $H$  значений сигнальных параметров в соответствующий вариант функции (1.39) с последующим выбором их комбинации, дающей наибольшее значение (1.39) и превышающей заранее установленный порог. При этом в соответствии с количеством точечных источников сигналов (переотражателей) должно изменяться и количество блоков в структуре матрицы  $H$ .

Ранее предполагалось, что при детектировании информационных символов матрица  $H$  радиоканала точно известна в приемнике. На практике матрица канала измеряется в процессе передачи.

Следует отметить, что методы оценки характеристик радиоканалов делятся на две группы: это “слепые” методы и методы, основанные на периодической посылке специальных тестирующих сигналов. При применении “слепых” методов характеристики

канала определяются на основе взаимосвязи априорно известных статистических характеристик излучаемых сигналов и измеренных характеристик выходных сигналов, т.е. измеряются статистические характеристики принимаемых сигналов. Преимущество “слепых” методов в том, что при их применении нет дополнительных затрат времени на посылку специальных измерительных сигналов. Однако им присущи и существенные недостатки. Для измерения элементов матрицы канала с достаточной точностью необходимо значительное время. Поэтому “слепые” методы неприменимы в быстро изменяющихся радиоканалах.

Более распространена вторая группа методов оценки матрицы радиоканала с помощью тестирующих сигналов. При пространственно-временном кодировании известные тестирующие сигналы посылаются в начале каждого блока перед посылкой информационных символов. Если значения элементов матрицы канала быстро изменяются во времени и зависят от частоты, что характерно, например, для тропосферного канала связи, то посылки тестирующей последовательности только в начале блока может оказаться недостаточно для точной оценки канала. В этом случае тестирующие символы (пилот-символы) вставляются периодически между информационными символами во время передачи блока. Это так называемая модуляция, связанная с пилот-символами (PSAM – Pilot Symbol Assisted Modulation) [62].

Если принять матрицу пилот-символов (известную в приемнике) равной  $S$ , а матрицу принятых демодулированных символов (соответствующую  $S$ ) равной  $\hat{A}$ , то оценку матрицы  $H$  можно осуществить по следующим выражениям [62]:

$$\hat{H} = \hat{A} \cdot S^{-1},$$

если  $S$  – квадратная матрица, и в случае прямоугольной матрицы  $S$

$$\hat{H} = S^H (S \cdot S^H)^{-1} \hat{A}.$$

Для точной оценки матрицы  $H$  необходимо увеличивать длительность тестирующего сигнала и время измерения [62]. Однако

при увеличении длительности интервала измерения неизбежно уменьшится время передачи информации и повысится вероятность изменения условий распространения электромагнитных волн. Таким образом, при выборе длительности тестирующего сигнала следует идти на компромисс между обеспечением достаточной точности измерений и сокращением времени передачи информации.

В режиме мульти-ММО возможна последовательная подача контрольных сигналов передающими станциями, однако для этого следует строго регламентировать их выход в эфир. Поэтому более простым решением, с организационной точки зрения, является формирование оценки блочной матрицы  $H$  путем одновременной передачи контрольных сигналов сразу от нескольких связанных в сеть корреспондентских узлов. Возможно также промежуточное по сложности решение, когда в эфир выходят одновременно не все станции связи, а их группы. Чтобы уйти от необходимости регламентации излучения контрольных сигналов группами таких станций, удобно рассматривать решение задачи оценивания матрицы  $H$  как часть этапа вхождения в связь. Поскольку при этом общее количество станционных групп и их численный состав являются случайными, перед решением задачи оценки блочной матрицы  $H$  в режиме мульти-ММО следует осуществлять проверку гипотез о количестве источников контрольных сигналов. Для минимизации количества вероятностных факторов следует использовать одинаковое количество контрольных сигналов на всех передающих станциях, что позволит получать однотипные структуры блоков матрицы  $H$ .

В общем случае возможно рассмотрение ситуации, когда часть станций осуществляет передачу полезной информации, а другая – передает в это время контрольные сигналы для оценивания характеристик трасы распространения электромагнитных волн. Такой случай является наиболее сложным с алгоритмической точки зрения, особенно, если заранее неизвестно, какие именно станции находятся в режиме передачи контрольных сиг-

налов. Поэтому для упрощения обработки принятых сигналов в режиме мульти-ММО целесообразно использовать определенную регламентацию режимов работы взаимодействующих станций в сети, чтобы исключить одновременный прием контрольных сигналов и полезной информации с разных угловых направлений.

### *Синтез метода двухэтапной демодуляции сигналов*

В качестве одного из перспективных методов модуляции сигналов в каналах связи, как уже отмечалось, может рассматриваться OFDM (N-OFDM). При использовании в станции связи технологии цифрового диаграммообразования (ЦДО) оптимальная демодуляция OFDM (N-OFDM) сигналов возможна по отсчетам АЦП в рамках одноэтапной обработки. В основе ее лежит подстановка значений диаграмм направленности (ДН) вторичных пространственных каналов приемной ЦАР в матричную запись откликов частотных фильтров, синтезированных в результате операции БПФ.

Альтернативный вариант обработки состоит в переходе к двухэтапной демодуляции OFDM (N-OFDM) сигналов [55] (рис. 1.8). Суть ее сводится к тому, что на первом этапе определяются амплитуды сигналов по выходам вторичных приемных каналов ЦАР в каждом временном отсчете. При этом могут использоваться оценки угловых координат направлений приема сигналов от передатчиков, полученные на этапе вхождения в связь, либо рассчитанные по данным средств спутниковой навигации географические координаты объектов, поступившие по служебному каналу связи от взаимодействующих средств.

Если представить вектор напряжений OFDM (N-OFDM) сигналов  $U$  по выходу процедуры ЦДО линейной ЦАР в составе радиорелейной станции связи, принимающей сигналы одной поляризации, как

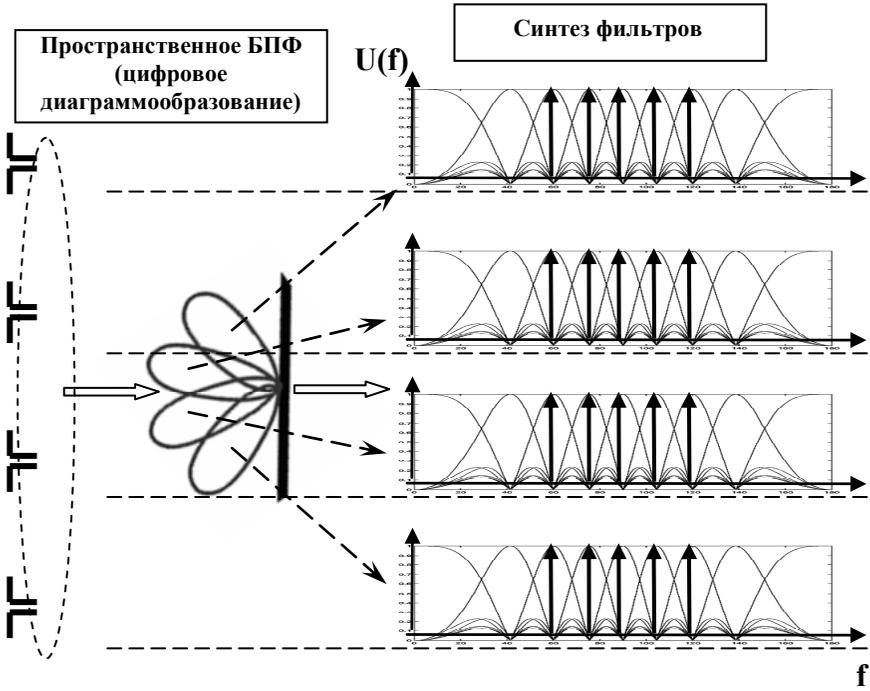


Рис. 1.8. Физическая сущность двухэтапной цифровой обработки сигналов OFDM (N-OFDM) по выходам линейной ЦАР

$$U = QW + n, \quad (1.40)$$

где  $Q$  – матрица значений ДН (полагается инвариантной к частоте сигнала в пределах занимаемой им спектральной полосы);  $W$  – вектор амплитуд сигналов;  $n$  – вектор напряжений шумов, то оптимальная оценка вектора амплитуд в каждом временном отсчете может быть определена в известном виде

$$\tilde{W} = (Q^T Q)^{-1} Q^T U, \quad (1.41)$$

где  $W$  – вектор амплитуд сигналов, размерность которого определяется не количеством OFDM ( $N$ -OFDM) поднесущих, а количеством угловых направлений одновременного приема сигналов;  $Q$  – матрица значений ДН приемных каналов линейной ЦАР в направлениях на источники сигналов;  $U$  – вектор напряжений сигналов на выходах приемных каналов ЦАР.

По большому счету, рассмотренный вектор амплитуд сигналов  $W$  по выходу процедуры ЦДО будет представлять собой произведение собственно амплитуд сигналов, приходящих одновременно с нескольких направлений, на значения АЧХ приемных каналов. Однако в этом случае, чтобы не рассматривать отдельно амплитуды сигналов каждой из поднесущих, столь подробная детализация элементов вектора  $W$  не используется, а учет АЧХ приемников при необходимости откладывается на второй этап демодуляции, соответствующий обработке напряжений сигналов, полученных после выполнения операции временного БПФ для синтеза частотных фильтров. Однако, чтобы указать на мультипликативный характер элементов вектора  $W$  уместно использовать в отношении его компонент термин “обобщенные амплитуды сигналов”.

Набор полученных оценок векторов обобщенных амплитуд  $W$  для заданных угловых направлений приема сигналов далее используется в качестве напряжений сигналов при формировании сетки частотных фильтров с помощью БПФ. Их отклики можно выразить в виде

$$W_{\text{FFT}} = FA + n_w, \quad (1.42)$$

где  $W_{\text{FFT}}$  – вектор напряжений сигналов по выходу частотных фильтров;  $A$  – вектор амплитуд сигналов;  $F$  – матрица произведений АЧХ частотных фильтров  $V_r(f_m)$  ( $r$  – номер фильтра;  $m$  – номер поднесущей) и фильтров дополнительного стробирования отсчетов АЦП  $\theta(f_m)$ , в случае применения операции дополнительного стробирования,

$$F = \left[ \Theta(f_1) \cdot \begin{bmatrix} V_1(f_1) \\ V_2(f_1) \\ V_3(f_1) \\ \dots \\ V_M(f_1) \end{bmatrix} \Theta(f_2) \cdot \begin{bmatrix} V_1(f_2) \\ V_2(f_2) \\ V_3(f_2) \\ \dots \\ V_M(f_2) \end{bmatrix} \dots \Theta(f_2) \cdot \begin{bmatrix} V_1(f_M) \\ V_2(f_M) \\ V_3(f_M) \\ \dots \\ V_M(f_M) \end{bmatrix} \right];$$

$n_w$  – шумовой вектор.

Оптимальная оценка вектора амплитуд, необходимая для демодуляции данных, определяется, согласно методу наименьших квадратов, известным выражением

$$A = (F^T F)^{-1} F^T W_{\text{FFT}}. \quad (1.43)$$

В случае плоской антенной решетки выражения (1.40), (1.41) могут быть переписаны в виде

$$U = (Q \blacksquare V)W + n = PW + n,$$

$$W = (P^T P)^{-1} P^T U, \quad (1.44)$$

где  $P = (Q \blacksquare V)$ ;  $Q$  – матрица ДН антенных элементов в азимутальной плоскости;  $V$  – матрица ДН антенных элементов в угломестной плоскости.

Дальнейший ход вычислений по обработке сигналов остается без изменений.

Таким образом, на конечном этапе процедуры двухэтапной демодуляции применяется сигнальная матрица  $F$  меньшей размерности, составленная лишь из значений АЧХ фильтров БПФ и дополнительного стробирования, без учета ДН приемных каналов ЦАР, что позволяет упростить вычислительные операции с использованием матриц.

При использовании метода двухэтапной демодуляции в отношении (OFDM) N-OFDM сигналов двойной поляризации на пер-

вом его этапе производится оценивание амплитуд сигналов в каждой из поляризаций по выходу процедур ЦДО для всего набора временных отсчетов. При этом используются известные коэффициенты кроссполяризационной связи для заданных угловых направлений приема сигналов. Эти угловые направления, как уже отмечалось, могут быть измерены на этапе вхождения в связь либо рассчитаны по данным средств спутниковой навигации.

В результате вектор напряжений OFDM (N-OFDM) сигналов  $U$  по выходу линейной ЦАР можно представить в виде

$$U = \begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_H & q_{HV} Q_V \\ q_{VH} Q_H & Q_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_H \\ W_V \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

где  $Q$  – матрица значений ДН в пренебрежении их частотной зависимостью;

$\begin{bmatrix} W_H \\ W_V \end{bmatrix}$  – вектор обобщенных амплитуд сигналов;  $q_{HV}$ ,  $q_{VH}$  –

матрицы коэффициентов кроссполяризационной связи (полагаются инвариантными к частоте сигналов),  $n$  – вектор напряжений шумов.

Оптимальная оценка вектора обобщенных амплитуд может быть определена как

$$W = \begin{bmatrix} W_H \\ W_V \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} Q_H & q_{HV} Q_V \\ q_{VH} Q_H & Q_V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_H & q_{HV} Q_V \\ q_{VH} Q_H & Q_V \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} Q_H & q_{HV} Q_V \\ q_{VH} Q_H & Q_V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

Таким образом, для каждой из поляризаций формируется своя оценка вектора обобщенных амплитуд, что позволяет полностью распараллелить дальнейший процесс формирования сетки частотных фильтров и последующей демодуляции сигналов.

В случае плоской ЦАР с нефакторизуемыми диаграммами направленности в приведенных соотношениях необходимо учесть направленные свойства антенных элементов в двух угловых плоскостях. В частности, взамен (1.45), (1.46) получим:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{U}_H}{\mathbf{U}_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{W}_H}{\mathbf{W}_V} \end{bmatrix}; \quad (1.47)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{W}_H}{\mathbf{W}_V} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \quad (1.48)$$

$$\times \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & | & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{bmatrix}$$

где  $\tilde{\mathbf{Q}}_H = \begin{bmatrix} Q_{H1}(x_1, y_1) & Q_{H1}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{H1}(x_M, y_M) \\ Q_{H2}(x_1, y_1) & Q_{H2}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{H2}(x_M, y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{HR}(x_1, y_1) & Q_{HR}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{HR}(x_M, y_M) \end{bmatrix};$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_V = \begin{bmatrix} Q_{V1}(x_1, y_1) & Q_{V1}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{V1}(x_M, y_M) \\ Q_{V2}(x_1, y_1) & Q_{V2}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{V2}(x_M, y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{VR}(x_1, y_1) & Q_{VR}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{VR}(x_M, y_M) \end{bmatrix}.$$

При факторизуемых ДН выражение получает более сложную запись

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{U}_H}{\mathbf{U}_V} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & | & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & | & \mathbf{Q}_V \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} \mathbf{V}_H & | & \mathbf{d}_{HV} \mathbf{V}_V \\ \mathbf{d}_{VH} \mathbf{V}_H & | & \mathbf{V}_V \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{W}_H}{\mathbf{W}_V} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \frac{\mathbf{Q}_H \blacksquare \mathbf{V}_H}{q_{vH} \mathbf{Q}_H \blacksquare d_{vH} \mathbf{V}_H} \mid \frac{q_{Hv} \mathbf{Q}_V \blacksquare d_{Hv} \mathbf{V}_V}{\mathbf{Q}_V \blacksquare \mathbf{V}_V} \right] \left[ \frac{\mathbf{W}_H}{\mathbf{W}_V} \right], \quad (1.49)$$

где “ $\ominus$ ” – знак операции блочного транспонированного торцевого произведения матриц (см. раздел 4).

При этом с учетом тождества, справедливого для блочного транспонированного торцевого произведения матриц [42],

$$[D \ominus B]^T = D^T \ominus B^T, \quad (1.50)$$

где квадратные скобки обозначают блочную матрицу, а символ “ $\ominus$ ” – знак операции блочного торцевого произведения [42] (см. раздел 4), выражение (1.48) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{W}}_H \\ \hat{\mathbf{W}}_V \end{array} \right] &= \left( \left( \left[ \frac{\mathbf{Q}_H}{q_{vH} \mathbf{Q}_H} \mid \frac{q_{Hv} \mathbf{Q}_V}{\mathbf{Q}_V} \right] \ominus \left[ \frac{\mathbf{V}_H}{d_{vH} \mathbf{V}_H} \mid \frac{d_{Hv} \mathbf{V}_V}{\mathbf{V}_V} \right] \right)^T \times \right)^{-1} \times \\ &\times \left( \left[ \frac{\mathbf{Q}_H}{q_{vH} \mathbf{Q}_H} \mid \frac{q_{Hv} \mathbf{Q}_V}{\mathbf{Q}_V} \right] \ominus \left[ \frac{\mathbf{V}_H}{d_{vH} \mathbf{V}_H} \mid \frac{d_{Hv} \mathbf{V}_V}{\mathbf{V}_V} \right] \right) \times \\ &\times \left( \left[ \frac{\mathbf{Q}_H}{q_{vH} \mathbf{Q}_H} \mid \frac{q_{Hv} \mathbf{Q}_V}{\mathbf{Q}_V} \right] \ominus \left[ \frac{\mathbf{V}_H}{d_{vH} \mathbf{V}_H} \mid \frac{d_{Hv} \mathbf{V}_V}{\mathbf{V}_V} \right] \right)^T \left[ \begin{array}{c} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{array} \right] = \\ &= \left( \left( \left[ \frac{\mathbf{Q}_H}{q_{vH} \mathbf{Q}_H} \mid \frac{q_{Hv} \mathbf{Q}_V}{\mathbf{Q}_V} \right]^T \ominus \left[ \frac{\mathbf{V}_H}{d_{vH} \mathbf{V}_H} \mid \frac{d_{Hv} \mathbf{V}_V}{\mathbf{V}_V} \right]^T \right) \times \right)^{-1} \times \\ &\times \left( \left[ \frac{\mathbf{Q}_H}{q_{vH} \mathbf{Q}_H} \mid \frac{q_{Hv} \mathbf{Q}_V}{\mathbf{Q}_V} \right] \ominus \left[ \frac{\mathbf{V}_H}{d_{vH} \mathbf{V}_H} \mid \frac{d_{Hv} \mathbf{V}_V}{\mathbf{V}_V} \right] \right) \times \\ &\times \left( \left[ \frac{\mathbf{Q}_H}{q_{vH} \mathbf{Q}_H} \mid \frac{q_{Hv} \mathbf{Q}_V}{\mathbf{Q}_V} \right]^T \ominus \left[ \frac{\mathbf{V}_H}{d_{vH} \mathbf{V}_H} \mid \frac{d_{Hv} \mathbf{V}_V}{\mathbf{V}_V} \right]^T \right) \left[ \begin{array}{c} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{Q}_H^T \square \mathbf{V}_H^T & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V^T \square \mathbf{d}_{HV} \mathbf{V}_V^T \\ \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H^T \square \mathbf{d}_{VH} \mathbf{V}_H^T & \mathbf{Q}_V^T \square \mathbf{V}_V^T \end{array} \right] \times \\ \times \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{Q}_H \blacksquare \mathbf{V}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \blacksquare \mathbf{d}_{HV} \mathbf{V}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H \blacksquare \mathbf{d}_{VH} \mathbf{V}_H & \mathbf{Q}_V \blacksquare \mathbf{V}_V \end{array} \right] \end{array} \right)^{-1} \times \\
&\times \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{Q}_H^T \square \mathbf{V}_H^T & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V^T \square \mathbf{d}_{HV} \mathbf{V}_V^T \\ \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H^T \square \mathbf{d}_{VH} \mathbf{V}_H^T & \mathbf{Q}_V^T \square \mathbf{V}_V^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (1.51)
\end{aligned}$$

Чтобы получить для (1.51) свернутую запись матрицы, подлежащей обращению, следует применить известное из [42] тождество

$$\begin{aligned}
& \left( \left[ \mathbf{D}_{ji} \right] \odot \left[ \mathbf{B}_{ji} \right] \right) \left( \left[ \mathbf{K}_{ik} \right] \odot \left[ \mathbf{M}_{ik} \right] \right) = \\
& = \left[ P_{jk} = \sum_i \left\{ \left( \mathbf{D}_{ji} \cdot \mathbf{K}_{ik} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{ji} \cdot \mathbf{M}_{ik} \right) \right\} \right], \quad (1.52)
\end{aligned}$$

где символ “ $\circ$ ” – поэлементное матричное произведение Адамара, в нижних индексах первая буква соответствует номеру блок-строки, а вторая – номеру блок-столбца, а также его развернутую запись для случая  $j=1, 2; i=1, 2; k=1, 2$  (размерность блочных матриц “2 блока  $\times$  2 блока”)

$$\begin{aligned}
& \left( \mathbf{D}^T \odot \mathbf{B}^T \right) \left( \mathbf{D} \odot \mathbf{B} \right) = \\
& = \left[ \begin{array}{c|c} \sum_{i=1}^2 \left\{ \left( \mathbf{D}_{1i}^T \cdot \mathbf{D}_{i1} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{1i}^T \cdot \mathbf{B}_{i1} \right) \right\} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left( \mathbf{D}_{1i}^T \cdot \mathbf{D}_{i2} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{1i}^T \cdot \mathbf{B}_{i2} \right) \right\} \\ \sum_{i=1}^2 \left\{ \left( \mathbf{D}_{2i}^T \cdot \mathbf{D}_{i1} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{2i}^T \cdot \mathbf{B}_{i1} \right) \right\} & \sum_{i=1}^2 \left\{ \left( \mathbf{D}_{2i}^T \cdot \mathbf{D}_{i2} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{2i}^T \cdot \mathbf{B}_{i2} \right) \right\} \end{array} \right] = \\
& = \left[ \begin{array}{c|c} \left( \mathbf{D}_{11}^T \cdot \mathbf{D}_{11} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{11}^T \cdot \mathbf{B}_{11} \right) + \left( \mathbf{D}_{12}^T \cdot \mathbf{D}_{21} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{12}^T \cdot \mathbf{B}_{21} \right) & \left( \mathbf{D}_{11}^T \cdot \mathbf{D}_{12} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{11}^T \cdot \mathbf{B}_{12} \right) + \left( \mathbf{D}_{12}^T \cdot \mathbf{D}_{22} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{12}^T \cdot \mathbf{B}_{22} \right) \\ \left( \mathbf{D}_{21}^T \cdot \mathbf{D}_{11} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{21}^T \cdot \mathbf{B}_{11} \right) + \left( \mathbf{D}_{22}^T \cdot \mathbf{D}_{21} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{22}^T \cdot \mathbf{B}_{21} \right) & \left( \mathbf{D}_{21}^T \cdot \mathbf{D}_{12} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{21}^T \cdot \mathbf{B}_{12} \right) + \left( \mathbf{D}_{22}^T \cdot \mathbf{D}_{22} \right) \circ \left( \mathbf{B}_{22}^T \cdot \mathbf{B}_{22} \right) \end{array} \right].
\end{aligned}$$

В последнем выражении индекс “Т” помимо операции транспонирования обозначает также принадлежность матричного блока транспонированной блочной матрице, что важно для правильной трактовки ее нумерации индексов. В результате получим [55]

$$\left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & q_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline q_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right]^T \oplus \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{V}_H & d_{HV} \mathbf{V}_V \\ \hline d_{VH} \mathbf{V}_H & \mathbf{V}_V \end{array} \right]^T \right) \times \\ \times \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & q_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline q_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right] \ominus \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{V}_H & d_{HV} \mathbf{V}_V \\ \hline d_{VH} \mathbf{V}_H & \mathbf{V}_V \end{array} \right] \right) = [Z_1 \mid Z_2],$$

$$\text{где } Z_1 = \frac{\left[ (\mathbf{Q}_H^T \mathbf{Q}_H) \circ (\mathbf{V}_H^T \mathbf{V}_H) + ((q_{VH} \mathbf{Q}_H)^T q_{VH} \mathbf{Q}_H) \circ ((d_{VH} \mathbf{V}_H)^T d_{VH} \mathbf{V}_H) \right]}{\left[ (q_{HV} \mathbf{Q}_V)^T \mathbf{Q}_H \right] \circ ((d_{HV} \mathbf{V}_V)^T \mathbf{V}_H) + (\mathbf{Q}_V^T q_{VH} \mathbf{Q}_H) \circ (\mathbf{V}_V^T d_{VH} \mathbf{V}_H)};$$

$$Z_2 = \frac{\left[ (\mathbf{Q}_H^T q_{HV} \mathbf{Q}_V) \circ (\mathbf{V}_H^T d_{HV} \mathbf{V}_V) + ((q_{VH} \mathbf{Q}_H)^T \mathbf{Q}_V) \circ ((d_{VH} \mathbf{V}_H)^T \mathbf{V}_V) \right]}{\left[ (\mathbf{Q}_V^T \mathbf{Q}_V) \circ (\mathbf{V}_V^T \mathbf{V}_V) + (q_{HV} \mathbf{Q}_V)^T q_{HV} \mathbf{Q}_V \right] \circ ((d_{HV} \mathbf{V}_V)^T d_{HV} \mathbf{V}_V)}.$$

Следует отметить, что оценки  $\mathbf{W}_H$ ,  $\mathbf{W}_V$ , по сути, представляют собой оценки суммарных напряжений сигналов множества частот в отдельно взятом моменте времени. Предполагается, что на протяжении всего интервала времени, в течение которого формируется массив оценок обобщенных амплитуд, амплитуда каждого отдельно взятого гармонического сигнала в многочастотном пакете остается неизменной. Для того, чтобы такое допущение было справедливым, помимо соответствующего формирования сигналов на передающей стороне требуется должным образом провести синхронизацию канала связи.

По полученному массиву оценок вектора обобщенных амплитуд  $\mathbf{W}$  для интересующих направлений приема сигналов далее формируют наборы частотных фильтров с помощью БПФ. При

этом указанные оценки обобщенных амплитуд используются в качестве исходных напряжений сигналов. В последующем для демодуляции данных будет применяться сигнальная матрица  $F$ , составленная только из произведений значений АЧХ фильтров дополнительного стробирования и АЧХ частотных фильтров БПФ, чьи отклики можно выразить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{FFT}_H} \\ \mathbf{W}_{\text{FFT}_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H \\ \mathbf{F}_V \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_H \\ \mathbf{A}_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{w_H} \\ \mathbf{n}_{w_V} \end{bmatrix}, \quad (1.53)$$

где  $\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{FFT}_H} \\ \mathbf{W}_{\text{FFT}_V} \end{bmatrix}$  – вектор напряжений откликов частотных фильтров,

соответствующих каналам горизонтальной и вертикальной поляризации;  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_H \\ \mathbf{A}_V \end{bmatrix}$  – вектор амплитуд сигналов двух поляризаций,

непосредственно содержащий символьную информацию;  $\begin{bmatrix} \mathbf{F}_H \\ \mathbf{F}_V \end{bmatrix}$  –

блочная матрица, элементы которой представляют собой произведения АЧХ фильтров БПФ и фильтров дополнительного стробирования отсчетов АЦП;  $[\times]$  – символ блочного обычного произведения матриц [53];  $\begin{bmatrix} \mathbf{n}_{w_H} \\ \mathbf{n}_{w_V} \end{bmatrix}$  – шумовой вектор.

Искомая оценка вектора амплитуд имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_H \\ \mathbf{A}_V \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H^T \\ \mathbf{F}_V^T \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H \\ \mathbf{F}_V \end{bmatrix} \right)^{-1} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H^T \\ \mathbf{F}_V^T \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{FFT}_H} \\ \mathbf{W}_{\text{FFT}_V} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_H^T \mathbf{F}_H)^{-1} \\ (\mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V)^{-1} \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H^T \\ \mathbf{F}_V^T \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{FFT}_H} \\ \mathbf{W}_{\text{FFT}_V} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

или в эквивалентной записи с разделением по квадратурным составляющим амплитуд и поляризациям

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_H^c \\ \mathbf{A}_H^s \end{bmatrix} = (\mathbf{F}_H^T \mathbf{F}_H)^{-1} \mathbf{F}_H^T \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_{\text{FFT}_H}^c \\ \widehat{\mathbf{W}}_{\text{FFT}_H}^s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_V^c \\ \mathbf{A}_V^s \end{bmatrix} = (\mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V)^{-1} \mathbf{F}_V^T \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_{\text{FFT}_V}^c \\ \widehat{\mathbf{W}}_{\text{FFT}_V}^s \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

где  $\mathbf{A}_H^c = [a_{H1}^c \quad a_{H2}^c \quad \dots \quad a_{HM}^c]^T$ ;  $\mathbf{A}_H^s = [a_{H1}^s \quad a_{H2}^s \quad \dots \quad a_{HM}^s]^T$ ;

$\mathbf{A}_V^c = [a_{V1}^c \quad a_{V2}^c \quad \dots \quad a_{VM}^c]^T$ ;  $\mathbf{A}_V^s = [a_{V1}^s \quad a_{V2}^s \quad \dots \quad a_{VM}^s]^T$ .

Существенно, что в изложенной последовательности операций по обработке сигналов не предусмотрен учет кроссполяризационных связей, поскольку предполагается, что полное разделение сигналов разных поляризаций уже было осуществлено на этапе оценивания вектора обобщенных амплитуд, перед формированием по ним частотных фильтров с помощью преобразования Фурье. Однако такое допущение будет уместно лишь в случае частотно-инвариантных коэффициентов кроссполяризационной связи. В противном случае, например, в выражениях (1.53) – (1.55), необходимо учесть частотную зависимость кроссполяризации, переписав указанные соотношения в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{FFT}_H} \\ \mathbf{W}_{\text{FFT}_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H & | & \mathbf{q}_{HV}(\omega)\mathbf{F}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH}(\omega)\mathbf{F}_H & | & \mathbf{F}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_H \\ \mathbf{A}_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{w_H} \\ \mathbf{n}_{w_V} \end{bmatrix}; \quad (1.56)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_H \\ \hat{\mathbf{A}}_V \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H & | & \mathbf{q}_{HV}(\omega)\mathbf{F}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH}(\omega)\mathbf{F}_H & | & \mathbf{F}_V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H & | & \mathbf{q}_{HV}(\omega)\mathbf{F}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH}(\omega)\mathbf{F}_H & | & \mathbf{F}_V \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} \mathbf{F}_H & | & \mathbf{q}_{HV}(\omega)\mathbf{F}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH}(\omega)\mathbf{F}_H & | & \mathbf{F}_V \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{FFT}_H} \\ \mathbf{W}_{\text{FFT}_V} \end{bmatrix}$$

На первый взгляд может показаться, что использование коэффициентов кроссполяризационной связи, как на первом, так и на втором этапах обработки сигналов является обременительным с

вычислительной точки зрения. Наличие коэффициентов кроссполяризации в выражении (1.56) наводит на мысль о возможности однократного их использования лишь на последнем этапе обработки. При этом соотношения для первого этапа демодуляции сигналов, например в случае линейной ЦАР, упростятся к виду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H \\ \mathbf{Q}_V \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_H \\ \mathbf{W}_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_H \\ \mathbf{n}_V \end{bmatrix}; \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_H \\ \mathbf{W}_V \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H^T \\ \mathbf{Q}_V^T \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H \\ \mathbf{Q}_V \end{bmatrix} \right)^{-1} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H^T \\ \mathbf{Q}_V^T \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_H^T \mathbf{Q}_H)^{-1} \\ (\mathbf{Q}_V^T \mathbf{Q}_V)^{-1} \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H^T \\ \mathbf{Q}_V^T \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{U}_V \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Однако на самом деле такое упрощение возможно лишь при приеме сигналов с одного углового направления или при инвариантности кроссполяризационных эффектов к направлению прихода сигналов. В противном случае, при наличии нескольких направлений одновременного приема сигналов и зависимости проявления кроссполяризационного эффекта от направлений на источник сообщений использование выражений (1.57), (1.58) не позволяет полностью разделить сигналы по направлению прихода. Это приводит к неустраняемым ошибкам их демодуляции. В силу указанного, предпочтительным решением является разделение процесса учета кроссполяризации на два этапа: на первом – учитывается ее пространственная избирательность, а на втором – частотная зависимость. Для этого коэффициенты кроссполяризационной связи следует факторизовать, представив их как произведение чувствительных к направлению и частоте компонент, например:

$$\mathbf{q}_{HV} = \mathbf{q}_{HV}(x, y) \cdot \mathbf{q}_{HV}(\omega), \quad \mathbf{q}_{VH} = \mathbf{q}_{VH}(x, y) \cdot \mathbf{q}_{VH}(\omega).$$

При этом на этапе пространственного разделения сигналов работают коэффициенты  $q_{HV}(x, y)$ ,  $q_{VH}(x, y)$ , а после синтеза частотных фильтров – величины  $q_{HV}(\omega)$  и  $q_{VH}(\omega)$ .

Таким образом, благодаря принятой двухэтапной стратегии обработки с промежуточным оцениванием амплитуд сигналов, формирование частотных фильтров для всех приемных каналов цифровой антенной решетки не требуется. Это существенно сокращает объем необходимых вычислительных операций на этапе демодуляции сигналов, позволяет сократить время оценивания амплитуд сигналов по выходам частотных фильтров, а также снижает требования к размерам оперативной памяти и пропускной способности линий передачи данных в блоке демодуляции. Следует отметить, что помимо уменьшения вычислительных затрат на демодуляцию сигналов OFDM (N-OFDM), принятых по каналу связи ЦАР, двухэтапная схема обработки сигналов позволяет эффективно устранять влияние преднамеренных помех. Об этом речь пойдет в следующем подразделе.

### *Метод помехозащищенной демодуляции сигналов OFDM (N-OFDM) в приемном сегменте ЦАР*

Как известно, традиционным методом подавления активных помех в станциях беспроводной связи, использующих ЦАР, является формирование в виртуальных ДН провалов, ориентированных на источники помеховых сигналов. С этой целью может использоваться нелинейная весовая обработка либо вычитание мешающих откликов из совокупности принятых сигналов с помощью весовых коэффициентов, рассчитанных по оценкам угловых координат источников помех. Указанные варианты пространственной режекции приводят к необходимости восстановления ДН вторичных каналов или проведения, с учетом искажения ДН, коррекции оценок амплитуд, например, по результатам оценивания параметров пилот-сигналов.

Целью данного пункта является рассмотрение альтернативного варианта помехозащищенной демодуляции сигналов OFDM (N-OFDM), связанного с их двухэтапной обработкой [55, 57].

Суть первого этапа демодуляции, как уже отмечалось, сводится к оцениванию амплитуд сигналов по выходам синтезированных в результате ЦДО вторичных пространственных каналов в каждом временном отсчете. Именно данный этап является основным в решении задачи отстройки от активных помех. Специфика связанных задач в отличие от радиолокационных измерений позволяет использовать при этом известные угловые координаты направлений приема информационных сигналов, измеренные на этапе вхождения в связь, либо рассчитанные по данным спутниковой навигационной системы, поступившим по служебным каналам от корреспондентов. При этом предполагается, что в режиме вхождения в связь предусмотрена возможность мониторинга электромагнитной обстановки в эфире, что обеспечивает обнаружение помеховых сигналов и определение угловых координат их источников.

Промежуточное оценивание амплитуд сигналов на выходе процедуры цифрового диаграммообразования позволяет в каждом временном отсчете отсепарировать сигналы помех путем использования в дальнейшей обработке лишь той части вектора амплитуд, которая соответствует информационно полезным сигналам.

Наличие полной информации об угловых координатах излучателей OFDM (N-OFDM) сигналов и помех позволяет представить вектор выходных напряжений  $U$  процедуры ЦДО при использовании одиночной поляризации излучения в виде матричного выражения

$$\begin{aligned}
 U &= Q \cdot W + n = \\
 &= [Q_S \mid Q_P] \cdot \begin{bmatrix} W_S \\ W_P \end{bmatrix} + n,
 \end{aligned}
 \tag{1.59}$$

где  $Q = [Q_S \mid Q_P]$  – блочная матрица значений ДН вторичных пространственных каналов в направлениях на источники OFDM (N-OFDM) (блок  $Q_S$ ) и мешающих (блок  $Q_P$ ) сигналов;  $W^T = [W_S \mid W_P]$  – блочный вектор амплитуд OFDM (N-OFDM) сигналов  $W_S$  и помех  $W_P$ ; “Т” – символ операции транспонирования;  $n$  – вектор напряжений шумов.

Анализ приведенного матричного соотношения позволяет сделать вывод о возможности разделения на этапе оценивания вектора амплитуд  $W^T = [W_S \mid W_P]$  сигналов OFDM (N-OFDM) и сигналов помех. С этой целью при формировании оптимальной оценки вектора амплитуд  $\hat{W} = (Q^T Q)^{-1} Q^T U$  вычисляются лишь сегменты вектора  $\hat{W}$ , соответствующие информационным каналам связи, то есть блок  $W_S$ . При этом сегмент вектора оценок амплитуд помеховых сигналов (блок  $W_P$ ), не формируется вообще.

Аналогично можно осуществить разделение полезных сигналов двойной поляризации и помех в каждом из поляризационных каналов путем использования в последующей обработке лишь части вектора обобщенных амплитуд, соответствующей информационным сигналам двойной поляризации. Указанный массив фрагментов векторов оценок обобщенных амплитуд сигналов двойной поляризации должен формироваться в каждом временном отсчете. Для их оценивания предлагается воспользоваться все тем же традиционным методом наименьших квадратов.

Главным условием, обеспечивающим возможность применения рассмотренного метода помехозащиты, является ограничение на общее количество одновременно действующих источников сигналов и помех. Дело в том, что разделение мешающих и полезных сигналов основывается на решении системы уравнений, поэтому общее количество неизвестных амплитуд сигналов и помех в ней не должно превышать общего количества уравнений

системы. Учитывая комплексный характер напряжений сигналов по выходу процедуры ЦДО и комплексное представление их амплитуд, условие разделения сигналов по выходу R-канальной ЦАР, приходящих от M станций связи и P источников помех с известными угловыми координатами, может быть сформулировано в виде

$$M+P \leq R.$$

Другим ограничением является требование непревышения разрядной сетки АЦП результирующим напряжением смеси сигналов и помех по выходу аналогового приемного тракта.

Приведенные выражения соответствуют случаю линейной ЦАР. Для плоской антенной решетки при факторизуемых диаграммах направленности ее элементов в качестве матрицы Q при однополяризованном приеме следует использовать подстановку блочного транспонированного произведения матриц ДН

$$U = ([Q_S \mid Q_P] \circledast [V_S \mid V_P]) \cdot \begin{bmatrix} W_S \\ W_P \end{bmatrix} + n.$$

При использовании сигналов двойной поляризации в случае плоской ЦАР имеет место более сложная запись вектора напряжений

$$\begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix} = \left( \left( \begin{array}{cc|cc} Q_{HS} & q_{HVS} Q_{VS} & Q_{HP} & q_{HVP} Q_{VP} \\ \hline q_{VHS} Q_{HS} & Q_{VS} & q_{VHP} Q_{HP} & Q_{VP} \end{array} \right) \circledast \right. \\ \left. \circledast \begin{bmatrix} V_{HS} & d_{HVS} V_{VS} & V_{HP} & d_{HVP} V_{VP} \\ \hline d_{VHS} V_{HS} & V_{VS} & d_{VHP} V_{HP} & V_{VP} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} W_{HS} \\ W_{VS} \\ W_{HP} \\ W_{VP} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_H \\ n_V \end{bmatrix}.$$

На втором этапе демодуляции по выборке оценок вектора амплитуд OFDM (N-OFDM) сигналов  $W_S$  формируют отклики частотных фильтров с помощью БПФ

$$\hat{W}_{FFT} = FA + n_{FFT},$$

где  $F$  – матрица произведений значений АЧХ БПФ-фильтров и АЧХ приемных каналов на частотах поднесущих;  $A$  – вектор амплитуд OFDM (N-OFDM) поднесущих;  $n_{FFT}$  – шумовой вектор.

Выполнение процедуры БПФ позволяет синтезировать частотные фильтры, необходимые для спектральной селекции поднесущих OFDM (N-OFDM) сигналов, а также окончательной квадратурно-амплитудной демодуляции. При этом существенно, что указанная двухэтапная концепция обработки не требует формирования частотных фильтров для всех приемных каналов ЦАР. Это кардинально упрощает требования к быстродействию специализированных вычислителей, снижает требования к объемам оперативной памяти и пропускной способности линий передачи данных.

Искомая оценка вектора амплитуд имеет вид  $A = (F^T F)^{-1} \times F^T \hat{W}_{FFT}$ . Таким образом, оценивание амплитуд сигналов по выходу процедуры ЦДО позволяет не только снизить порядок матричных операций на этапе их демодуляции, но и отстроиться от активных помех.

Сравнение эффективности рассмотренной двухэтапной схемы обработки с альтернативным одноэтапным подходом, когда амплитуды сигналов оцениваются лишь по выходам частотных фильтров, удобно провести на основе математического моделирования в пакете MathCad. При этом модель двухэтапной демодуляции структурно состоит из блоков, унифицированных с одноэтапной обработкой, что позволило упростить процесс моделирования. Его результаты подтвердили работоспособность и преимущества двухэтапного оценивания в условиях помех. Анализ потенциальной точности двухэтапной демодуляции и ее сравнение с нижней границей Крамера-Рао будут приведены ниже.

## *Метод оценки граничных возможностей двухэтапной демодуляции N-OFDM сигналов*

Основным показателем эффективности рассмотренных методов демодуляции сигналов является точность оценивания квадратурных составляющих их амплитуд, характеризуемая дисперсией соответствующих оценок. Опираясь на данный показатель, можно получить все остальные известные показатели качества функционирования средств связи, так или иначе базирующиеся на величине указанной дисперсии. В частности, на этой основе могут быть рассчитаны вероятности ошибок и связанные с ними характеристики энергетической эффективности. По отношению к ним показатель в виде дисперсии оценок амплитудных компонент является первичным, и поэтому в данной работе ему будет уделено основное внимание.

Для расчета дисперсий ошибок оценивания амплитуд сигналов в рамках метода двухэтапной демодуляции целесообразно применить рассмотренный в разделе 1 аппарат нижней границы Крамера–Рао (НГКР). Если представить вектор напряжений N-OFDM сигналов  $U$  по выходу приемных каналов ЦАР как

$$U = QW + n, \quad (1.60)$$

где  $Q$  – матрица значений ДН;  $W$  – вектор обобщенных амплитуд сигналов;  $n$  – вектор напряжений шумов, то, опираясь на представленные ранее выкладки, выражение для НГКР дисперсий оценок вектора квадратурных составляющих обобщенных амплитуд напряжений сигналов, полученных по выходу цифровой диаграммообразующей схемы, может быть записано на основе информационной матрицы Фишера. Эту матрицу формируют из математических ожиданий вторых частных производных от квадрата невязки левой и правой частей уравнения (1.60) по неизвестному вектору обобщенных амплитуд  $W$ .

Соответствующая оцениванию вектора обобщенных амплитуд сигналов информационная матрица Фишера имеет вид  $I = Q^T Q$ .

Искомые выражения для дисперсий оценок обобщенных амплитуд могут быть получены в результате обращения матрицы  $I$  как элементы главной диагонали обратной матрицы Фишера [55]

$$\sigma_w^2 \geq \sigma_n^2 \text{diag}[Q^T Q]^{-1}, \quad (1.61)$$

где  $\sigma_n^2$  – дисперсия шумов в отдельно взятом временном отсчете по выходу вторичного пространственного канала;  $\text{diag}[M]$  – вектор, составленный из диагональных элементов квадратной матрицы  $M$ , или в пересчете к дисперсии шумов по выходу АЦП [55]

$$\sigma_w^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot \text{diag}[Q^T Q]^{-1}, \quad (1.62)$$

где  $R$  – размерность пространственного БПФ;  $\sigma_{ADC}^2$  – дисперсия шумов по выходу АЦП.

При условии, что отклики частотных фильтров БПФ можно выразить в виде

$$\hat{W}_{FFT} = FA + n_w, \quad (1.63)$$

где  $\hat{W}_{FFT}$  – вектор напряжений откликов частотных фильтров;  $F$  – АЧХ частотных фильтров, синтезированных в результате операции БПФ;  $A$  – вектор амплитуд сигналов;  $n_w$  – шумовой вектор, в качестве дисперсий оценок вектора амплитуд, соответствующих НГКР, следует рассматривать выражение

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_w^2 \cdot N \cdot \text{diag}[F^T F]^{-1}, \quad (1.64)$$

где  $N$  – размерность БПФ, используемого для синтеза частотных фильтров.

Подстановка соотношения (1.61) в (1.64) позволяет получить окончательное выражение для НГКР оценок искомых амплитудных составляющих сигналов в рамках двухэтапной процедуры.

Например, если сигналы, приходящие с разных направлений, имеют одинаковую сетку частот, границы для дисперсий могут быть записаны в виде

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_n^2 \cdot \text{diag}[Q^T Q]^{-1} \otimes \left( N \cdot \text{diag}[F^T F]^{-1} \right), \quad (1.65)$$

или при пересчете к дисперсии шумов по выходу АЦП

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot \text{diag}[Q^T Q]^{-1} \otimes \left( N \cdot \text{diag}[F^T F]^{-1} \right). \quad (1.66)$$

Если же на каждом угловом направлении используется своя сетка частот, оценки дисперсий (1.65) и (1.66) необходимо переписать в виде:

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_n^2 \cdot \left( \text{diag}[Q^T Q]^{-1} \right)_r [\otimes] \left( N \cdot \text{diag}[F_r^T F_r]^{-1} \right), \quad (1.67)$$

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot \left( \text{diag}[Q^T Q]^{-1} \right)_r [\otimes] \left( N \cdot \text{diag}[F_r^T F_r]^{-1} \right), \quad (1.68)$$

где  $[\otimes]$  – символ блочного кронекеровского произведения;  $F_r$  – матрица АЧХ частотных фильтров для частотной сетки, соответствующей  $r$ -му направлению прихода сигналов;  $(\text{diag}[M])_r$  –  $r$ -й элемент вектора  $\text{diag}[M]$ .

Для сравнения следует привести оценку НГКР, соответствующую одноэтапному оцениванию [55],

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{nW}^2 \cdot \text{diag}[P^T P]^{-1}, \quad (1.69)$$

где  $\sigma_{nW}^2$  – дисперсия шумов по выходам частотных фильтров;  $P = Q[\otimes]F$  – сигнальная матрица, элементы которой образованы произведениями значений АЧХ частотных фильтров и ДН вторичных пространственных каналов.

В пересчете к дисперсиям шумов по выходу АЦП выражение (1.69) может быть переписано в виде [55]:

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot N \cdot \text{diag}[P^T P]^{-1}; \quad (1.70)$$

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot N \cdot \text{diag} \left[ \left( Q[\otimes]F \right)^T \left( Q[\otimes]F \right) \right]^{-1}. \quad (1.71)$$

Полученный результат позволяет провести сопоставительный анализ точности одно- и двухэтапной процедур демодуляции. При условии полной ортогональности сигналов по частоте и направлению прихода одноэтапный и двухэтапный методы дают одно и то же значение среднеквадратического отклонения (СКО) оценок амплитуд сигналов в силу справедливости тождества

$$\text{diag}[Q^T Q]^{-1} \otimes (\text{diag}[F^T F]^{-1}) = \text{diag}[(Q \otimes F)^T (Q \otimes F)]^{-1}. \quad (1.72)$$

При неортогональной расстановке по частоте и неортогональных угловых координатах, если угловой разнос направлений прихода сигналов очень мал (меньше 0,5 обобщенной угловой координаты), двухэтапное оценивание проигрывает в точности одноэтапному. В общем случае имеет место неравенство

$$\text{diag}[Q^T Q]^{-1} \otimes (\text{diag}[F^T F]^{-1}) \geq \text{diag}[(Q \otimes F)^T (Q \otimes F)]^{-1}. \quad (1.73)$$

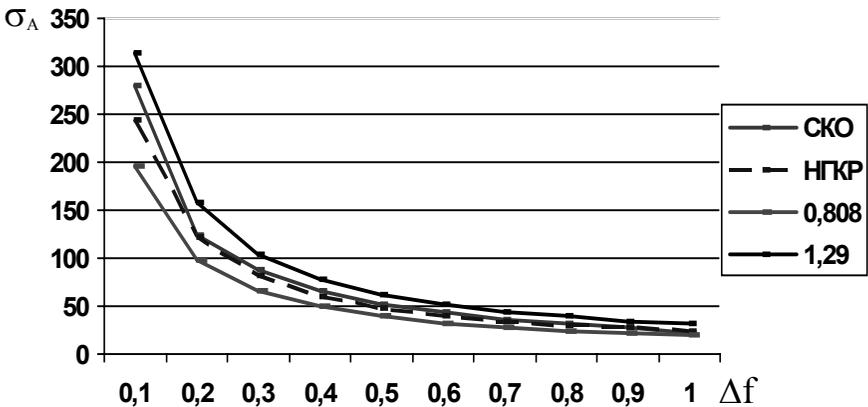


Рис. 1.9. Одноэтапное оценивание амплитуд двухчастотных сигналов (16-элементная ЦАР) при угловых координатах источников 0 и 1

В качестве примера использования полученных соотношений для НГКР следует привести результаты имитационного модели-

рования процесса одновременного приема с двух направлений, ортогональных по угловой координате, пакетов двухчастотных сигналов 16-элементной ЦАР [55]. На рис. 1.9, 1.10 по горизонтальной оси отложен частотный интервал между сигналами в долях полосы пропускания главного лепестка АЧХ фильтра БПФ. По вертикальной оси – среднеквадратическое отклонение (СКО) оценок амплитуд сигналов в квантах АЦП. Графики иллюстрируют экспериментальное значение СКО, полученное по данным имитационного моделирования, нижнюю границу Крамера–Рао (НГКР), верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала для значений СКО при статистической выборке из 100 реализаций с доверительной вероятностью 0,95 [5].

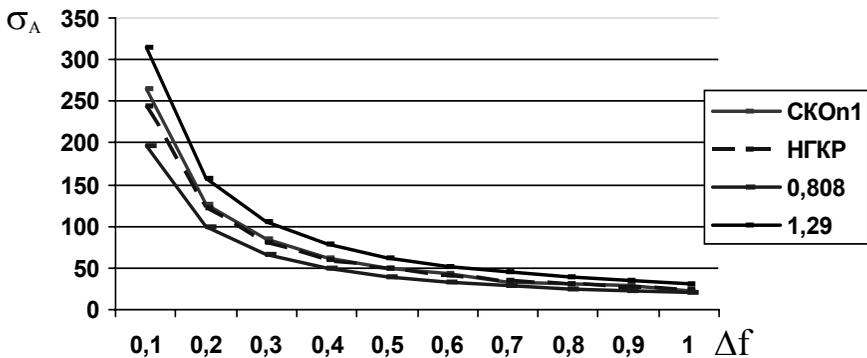


Рис. 1.10. Двухэтапное оценивание амплитуд двухчастотных сигналов (16-элементная ЦАР) при угловых координатах источников 0 и 1

При исследованном диапазоне частотных разнесений сигналов в пределах от 1 до 0,1 ширины главного лепестка АЧХ фильтра БПФ двухэтапное оценивание дает примерно тот же результат, что и одноэтапный метод демодуляции.

Следует отметить, что приведенные соотношения остаются в силе и в случае использования операции дополнительного стро-

бирования отсчетов АЦП не только после, но и перед операцией ЦДО, если использовать подстановку вместо элементов матрицы АЧХ произведений значений АЧХ БПФ фильтров и значений АЧХ фильтров дополнительного стробирования на частотах поднесущих. При этом для пересчета дисперсий оценок обобщенных амплитуд  $\sigma_A^2$  с учетом уровня шумов  $\sigma_{ADC}^2$  по выходу АЦП значения искомым величин  $\sigma_A^2$  следует умножить на количество отсчетов АЦП  $T$ , накапливаемых в течение длительности строба.

В случае плоской ЦАР в приведенные выражения для потенциальных дисперсий ошибок оценивания амплитудных составляющих сигналов (1.61), (1.62), (1.65) – (1.68) следует подставить вместо матрицы ДН антенных элементов  $Q$  произведение Хатри–Рао матриц значений ДН в двух ортогональных угловых плоскостях  $P=Q \blacksquare V$ . В результате, опираясь на тождества (см. раздел 4)

$$(A \blacksquare B)^T = A^T \square B^T;$$

$$(A \square B) \cdot (C \blacksquare D) = (A \cdot C) \circ (B \cdot D),$$

получим, например, модифицированный для плоской ЦАР вариант соотношения (1.61)

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 &\geq \sigma_n^2 \text{diag} [(Q \blacksquare V)^T (Q \blacksquare V)]^{-1} = \\ &= \sigma_n^2 \text{diag} [(Q^T \square V^T) (Q \blacksquare V)]^{-1} \end{aligned}$$

или

$$\sigma_W^2 \geq \sigma_n^2 \text{diag} \left[ (Q^T Q) \circ (V^T V) \right]^{-1}. \quad (1.74)$$

Переход к поэлементному произведению Адамара в обращаемой матрице позволяет сократить количество вычислительных операций и повысить точность расчета обратной матрицы за счет использования матриц меньшей размерности.

Аналогично для выражений (1.62), (1.65) – (1.68) будут иметь место записи [55]

$$\sigma_W^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot S \cdot \text{diag} \left[ \left( (Q^T Q) \circ (V^T V) \right)^{-1} \right], \quad (1.75)$$

где R, S – размерность пространственных фильтров БПФ в угло-местной и азимутальной плоскостях;

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{nW}^2 \cdot \text{diag} \left[ \left( (Q^T Q) \circ (V^T V) \right)^{-1} \right] \otimes \left( N \cdot \text{diag} \left[ F^T F \right]^{-1} \right); \quad (1.76)$$

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot S \cdot \text{diag} \left[ \left( (Q^T Q) \circ (V^T V) \right)^{-1} \right] \otimes \left( N \cdot \text{diag} \left[ F^T F \right]^{-1} \right); \quad (1.77)$$

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{nW}^2 \cdot \left( \text{diag} \left[ \left( (Q^T Q) \circ (V^T V) \right)^{-1} \right] \right)_r [\otimes] \left( N \cdot \text{diag} \left[ F_r^T F_r \right]^{-1} \right); \quad (1.78)$$

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_{ADC}^2 \cdot R \cdot S \cdot \left( \text{diag} \left[ \left( (Q^T Q) \circ (V^T V) \right)^{-1} \right] \right)_r [\otimes] \left( N \cdot \text{diag} \left[ F_r^T F_r \right]^{-1} \right). \quad (1.79)$$

Следует подчеркнуть, что все приведенные соотношения относятся к обработке сигналов с нулевыми значениями коэффициентов кроссполяризационной связи, что позволило рассматривать сигналы лишь одной поляризации. Следующим шагом в развитии теории двухэтапной демодуляции сигналов является обобщение изложенных выкладок на случай использования двойной поляризации излучения.

В случае оптимального оценивания амплитуд сигналов по методу максимального правдоподобия интерес представляет исследование предельных возможностей поляризационно-пространственного уплотнения сигналов на основе анализа НГКР для дисперсий оценок амплитуд.

Для аналитической оценки потенциальной точности метода демодуляции N-OFDM сигналов с ортогональной поляризацией

предлагается использовать известный подход, базирующийся на расчете НГКР для дисперсий оценок квадратурных составляющих амплитуд сигналов и сравнении этих дисперсий с допустимым порогом. Значение порога рассчитывается в зависимости от заданной вероятности безошибочной демодуляции переданных сообщений, с учетом использования дополнительного помехоустойчивого кодирования.

Как уже отмечалось, НГКР для дисперсий может быть получена обращением информационной матрицы Фишера. Применительно к QAM-сигналам удобнее рассматривать вместо дисперсий комплексных амплитуд сигналов, как они представлены в модели отклика приемной цифровой антенной решетки, дисперсии их квадратурных составляющих. Для этого в матричном представлении выходных напряжений откликов БПФ-фильтров следует перейти от вектора комплексных амплитуд к вещественному вектору, в элементах которого фигурирует каждая из квадратурных компонент отдельно.

Применительно к случаю известных номиналов частот поднесущих N-OFDM-пакета задача формирования информационной матрицы Фишера существенно упрощается и сводится к расчету квадратичных форм, входящих в выражения для оценок обобщенных амплитуд сигналов.

Например, НГКР для дисперсий оценок обобщенных амплитуд (1.47) на первом этапе двухэтапной демодуляции сигналов в случае линейной ЦАР может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{w_H}^2}{\sigma_{w_V}^2} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \sigma_{n_H}^2 + \mathbf{q}_{HV}^2 \sigma_{n_V}^2 \\ \sigma_{n_V}^2 + \mathbf{q}_{VH}^2 \sigma_{n_H}^2 \end{bmatrix} [\times] \quad (1.80)$$

$$[\times] \operatorname{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right] \right)^{-1},$$

где  $[\times]$  – символ блочного традиционного произведения матриц.

При условии одинаковой дисперсии шумов в приемных каналах горизонтальной и вертикальной поляризации с учетом “кроссполяризационной” связи выражение (1.80) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} \sigma_{W_H}^2 \\ \sigma_{W_V}^2 \end{bmatrix} \geq \sigma_n^2 \cdot \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right] \right)^{-1}, \quad (1.81)$$

где  $\sigma_n^2 = \sigma_{n_H}^2 + \mathbf{q}_{HV}^2 \sigma_{n_V}^2 = \sigma_{n_V}^2 + \mathbf{q}_{VH}^2 \sigma_{n_H}^2$ ,

или при пересчете к дисперсии шумов на входе АЦП

$$\begin{bmatrix} \sigma_{W_H}^2 \\ \sigma_{W_V}^2 \end{bmatrix} \geq R \cdot \sigma_{ADC}^2 \times \\ \times \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right] \right)^{-1}. \quad (1.82)$$

Переход к модели плоской ЦАР наиболее просто осуществляется при нефакторизуемых ДН антенных элементов. В частности, дисперсии оценок обобщенных амплитуд (1.49) по аналогии с (1.80), (1.81) запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{W_H}^2 \\ \sigma_{W_V}^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \sigma_{n_H}^2 + \mathbf{q}_{HV}^2 \sigma_{n_V}^2 \\ \sigma_{n_V}^2 + \mathbf{q}_{VH}^2 \sigma_{n_H}^2 \end{bmatrix} [\times] \\ [\times] \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{array} \right] \right)^{-1}, \quad (1.83)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{W_H}^2 \\ \sigma_{W_V}^2 \end{bmatrix} \geq \sigma_n^2 \cdot \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \hline \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{array} \right] \right)^{-1}, \quad (1.84)$$

$$\text{где } \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{H}} = \begin{bmatrix} Q_{\text{H1}}(x_1, y_1) & Q_{\text{H1}}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{\text{H1}}(x_M, y_M) \\ Q_{\text{H2}}(x_1, y_1) & Q_{\text{H2}}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{\text{H2}}(x_M, y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{\text{HR}}(x_1, y_1) & Q_{\text{HR}}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{\text{HR}}(x_M, y_M) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{V}} = \begin{bmatrix} Q_{\text{V1}}(x_1, y_1) & Q_{\text{V1}}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{\text{V1}}(x_M, y_M) \\ Q_{\text{V2}}(x_1, y_1) & Q_{\text{V2}}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{\text{V2}}(x_M, y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{\text{VR}}(x_1, y_1) & Q_{\text{VR}}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{\text{VR}}(x_M, y_M) \end{bmatrix}.$$

При факторизуемых ДН выражения для дисперсий, соответствующих НГКР, существенно усложняются вследствие перехода к блочному представлению матриц и использования их блочного транспонированного торцевого произведения. Например, альтернативный вариант (1.84) для такого случая можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{W_H}^2 \\ \sigma_{W_V}^2 \end{bmatrix} \geq \sigma_n^2 \cdot \text{diag} \left( \left( \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & | & q_{\text{HV}} \mathbf{Q}_V \\ \hline q_{\text{VH}} \mathbf{Q}_H & | & \mathbf{Q}_V \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} \mathbf{V}_H & | & d_{\text{HV}} \mathbf{V}_V \\ \hline d_{\text{VH}} \mathbf{V}_H & | & \mathbf{V}_V \end{bmatrix} \right)^T \times \right)^{-1} \right. \\ \left. \times \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & | & q_{\text{HV}} \mathbf{Q}_V \\ \hline q_{\text{VH}} \mathbf{Q}_H & | & \mathbf{Q}_V \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} \mathbf{V}_H & | & d_{\text{HV}} \mathbf{V}_V \\ \hline d_{\text{VH}} \mathbf{V}_H & | & \mathbf{V}_V \end{bmatrix} \right) \right) \quad (1.85)$$

и далее

$$\begin{bmatrix} \sigma_{W_H}^2 \\ \sigma_{W_V}^2 \end{bmatrix} \geq \sigma_n^2 \cdot \text{diag} [Z_1 \ | \ Z_2]^{-1}, \quad (1.86)$$

$$\text{где } Z_1 = \frac{\left( (\mathbf{Q}_H^T \mathbf{Q}_H) \circ (\mathbf{V}_H^T \mathbf{V}_H) + \left( (q_{\text{VH}} \mathbf{Q}_H)^T q_{\text{VH}} \mathbf{Q}_H \right) \circ \left( (d_{\text{VH}} \mathbf{V}_H)^T d_{\text{VH}} \mathbf{V}_H \right) \right)}{\left( (q_{\text{HV}} \mathbf{Q}_V)^T \mathbf{Q}_H \right) \circ \left( (d_{\text{HV}} \mathbf{V}_V)^T \mathbf{V}_H \right) + \left( \mathbf{Q}_V^T q_{\text{VH}} \mathbf{Q}_H \right) \circ \left( \mathbf{V}_V^T d_{\text{VH}} \mathbf{V}_H \right)};$$

$$Z_2 = \frac{\left( (\mathbf{Q}_H^T q_{\text{HV}} \mathbf{Q}_V) \circ (\mathbf{V}_H^T d_{\text{HV}} \mathbf{V}_V) + \left( (q_{\text{VH}} \mathbf{Q}_H)^T \mathbf{Q}_V \right) \circ \left( (d_{\text{VH}} \mathbf{V}_H)^T \mathbf{V}_V \right) \right)}{\left( \mathbf{Q}_V^T \mathbf{Q}_V \right) \circ \left( \mathbf{V}_V^T \mathbf{V}_V \right) + \left( (q_{\text{HV}} \mathbf{Q}_V)^T q_{\text{HV}} \mathbf{Q}_V \right) \circ \left( (d_{\text{HV}} \mathbf{V}_V)^T d_{\text{HV}} \mathbf{V}_V \right)}.$$

Что касается выражений для нижней границы Крамера–Рао дисперсий оценок амплитуд сигналов по выходам частотных фильтров, то в предположении о частотной инвариантности коэффициентов кроссполяризации, при двухэтапном оценивании таковые несложно получить, домножив выражения (1.80) – (1.86) с помощью блочного кронекеровского произведения на блочный

$$\text{вектор } N \cdot \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c} \mathbf{F}_H^T \\ \mathbf{F}_V^T \end{array} \right] [\times] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{F}_H \\ \mathbf{F}_V \end{array} \right] \right)^{-1} = N \cdot \text{diag} \left( \frac{\left[ \mathbf{F}_H^T \mathbf{F}_H \right]^{-1}}{\left[ \mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V \right]^{-1}} \right). \text{ Например,}$$

в случае (1.81), (1.84), (1.86) будут иметь место зависимости:

$$\left[ \begin{array}{c} \sigma_{A_H}^2 \\ \sigma_{A_V}^2 \end{array} \right] \geq \sigma_{nW}^2 \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_H & \mathbf{q}_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \mathbf{Q}_H & \mathbf{Q}_V \end{array} \right] \right) [\otimes] \\ [\otimes] N \cdot \text{diag} \left( \frac{\left[ \mathbf{F}_H^T \mathbf{F}_H \right]^{-1}}{\left[ \mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V \right]^{-1}} \right); \quad (1.87)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \sigma_{A_H}^2 \\ \sigma_{A_V}^2 \end{array} \right] \geq \sigma_{nW}^2 \cdot \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \mathbf{q}_{HV} \tilde{\mathbf{Q}}_V \\ \mathbf{q}_{VH} \tilde{\mathbf{Q}}_H & \tilde{\mathbf{Q}}_V \end{array} \right] \right) [\otimes] \\ [\otimes] N \cdot \text{diag} \left( \frac{\left[ \mathbf{F}_H^T \mathbf{F}_H \right]^{-1}}{\left[ \mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V \right]^{-1}} \right); \quad (1.88)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \sigma_{A_H}^2 \\ \sigma_{A_V}^2 \end{array} \right] \geq \sigma_{nW}^2 \cdot \text{diag} [Z_1 \mid Z_2]^{-1} [\otimes] N \cdot \text{diag} \left( \frac{\left[ \mathbf{F}_H^T \mathbf{F}_H \right]^{-1}}{\left[ \mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V \right]^{-1}} \right), \quad (1.89)$$

$$\text{где } Z_1 = \frac{\left[ (\mathbf{Q}_H^T \mathbf{Q}_H) \circ (\mathbf{V}_H^T \mathbf{V}_H) + ((\mathbf{q}_{vH} \mathbf{Q}_H)^T \mathbf{q}_{vH} \mathbf{Q}_H) \circ ((\mathbf{d}_{vH} \mathbf{V}_H)^T \mathbf{d}_{vH} \mathbf{V}_H) \right]}{\left[ (\mathbf{q}_{hV} \mathbf{Q}_V)^T \mathbf{Q}_H \circ ((\mathbf{d}_{hV} \mathbf{V}_V)^T \mathbf{V}_H) + (\mathbf{Q}_V^T \mathbf{q}_{vH} \mathbf{Q}_H) \circ (\mathbf{V}_V^T \mathbf{d}_{vH} \mathbf{V}_H) \right]};$$

$$Z_2 = \frac{\left[ (\mathbf{Q}_H^T \mathbf{q}_{hV} \mathbf{Q}_V) \circ (\mathbf{V}_H^T \mathbf{d}_{hV} \mathbf{V}_V) + ((\mathbf{q}_{vH} \mathbf{Q}_H)^T \mathbf{Q}_V) \circ ((\mathbf{d}_{vH} \mathbf{V}_H)^T \mathbf{V}_V) \right]}{\left[ (\mathbf{Q}_V^T \mathbf{Q}_V) \circ (\mathbf{V}_V^T \mathbf{V}_V) + (\mathbf{q}_{hV} \mathbf{Q}_V)^T \mathbf{q}_{hV} \mathbf{Q}_V \circ ((\mathbf{d}_{hV} \mathbf{V}_V)^T \mathbf{d}_{hV} \mathbf{V}_V) \right]}.$$

При необходимости учета частотной зависимости коэффициентов кроссполяризационной связи в выражения (1.87) – (1.89) вместо

множителя  $N \cdot \text{diag} \left( \frac{\left[ \mathbf{F}_H^T \mathbf{F}_H \right]^{-1}}{\left[ \mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V \right]^{-1}} \right)$  нужно подставить величину

$$N \cdot \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{F}_H & \mathbf{q}_{hV}(\omega) \mathbf{F}_V \\ \hline \mathbf{q}_{vH}(\omega) \mathbf{F}_H & \mathbf{F}_V \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{F}_H & \mathbf{q}_{hV}(\omega) \mathbf{F}_V \\ \hline \mathbf{q}_{vH}(\omega) \mathbf{F}_H & \mathbf{F}_V \end{array} \right] \right)^{-1}.$$

В рамках альтернативного подхода, состоящего в одноэтапном оценивании, в системах цифрового диаграммообразования с двойной поляризацией каналов плоской антенной решетки для аналитического описания модели отклика приемной ЦАР удобно использовать двойное матричное произведение Хатри-Рао

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} (\mathbf{Q}_H \bullet \mathbf{V}_H) \bullet \mathbf{F}_H & (\mathbf{q}_{hV} \mathbf{Q}_V \bullet \mathbf{d}_{hV} \mathbf{V}_V) \bullet \mathbf{F}_V \\ \hline (\mathbf{q}_{vH} \mathbf{Q}_H \bullet \mathbf{d}_{vH} \mathbf{V}_H) \bullet \mathbf{F}_H & (\mathbf{Q}_V \bullet \mathbf{V}_V) \bullet \mathbf{F}_V \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix}, \quad (1.90)$$

где “ $\bullet$ ” – символ произведения Хатри-Рао;  $\begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix}$  – вектор комплексных амплитуд N-OFDM сигналов горизонтальной H и вертикальной V поляризаций;

$$Q_H = \begin{bmatrix} Q_{H1}(x_1) & Q_{H1}(x_2) & \cdots & Q_{H1}(x_M) \\ Q_{H2}(x_1) & Q_{H2}(x_2) & \cdots & Q_{H2}(x_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{HR}(x_1) & Q_{HR}(x_2) & \cdots & Q_{HR}(x_M) \end{bmatrix},$$

$$Q_V = \begin{bmatrix} Q_{V1}(x_1) & Q_{V1}(x_2) & \cdots & Q_{V1}(x_M) \\ Q_{V2}(x_1) & Q_{V2}(x_2) & \cdots & Q_{V2}(x_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{VR}(x_1) & Q_{VR}(x_2) & \cdots & Q_{VR}(x_M) \end{bmatrix} \quad \text{– матрицы диаграмм на-}$$

правленности первичных или вторичных (после цифрового диаграммообразования) приемных каналов ЦАР в азимутальной плоскости на Н и V поляризациях;

$$V_H = \begin{bmatrix} V_{H1}(y_1) & V_{H1}(y_2) & \cdots & V_{H1}(y_M) \\ V_{H2}(y_1) & V_{H2}(y_2) & \cdots & V_{H2}(y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{HD}(y_1) & V_{HD}(y_2) & \cdots & V_{HD}(y_M) \end{bmatrix},$$

$$V_V = \begin{bmatrix} V_{V1}(y_1) & V_{V1}(y_2) & \cdots & V_{V1}(y_M) \\ V_{V2}(y_1) & V_{V2}(y_2) & \cdots & V_{V2}(y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{VD}(y_1) & V_{VD}(y_2) & \cdots & V_{VD}(y_M) \end{bmatrix} \quad \text{– матрицы диаграмм на-}$$

правленности первичных (вторичных) приемных каналов ЦАР в угломестной плоскости для Н (V) поляризаций;

$$F_H = \begin{bmatrix} \dot{F}_{H1}(\omega_{H11}) & \cdots & \dot{F}_{H1}(\omega_{HT1}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{F}_{HG}(\omega_{H11}) & \cdots & \dot{F}_{HG}(\omega_{HT1}) \end{bmatrix}, \quad F_V = \begin{bmatrix} \dot{F}_{V1}(\omega_{V11}) & \cdots & \dot{F}_{V1}(\omega_{VT1}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{F}_{VG}(\omega_{V11}) & \cdots & \dot{F}_{VG}(\omega_{VT1}) \end{bmatrix} \quad \text{–}$$

матрицы АЧХ  $\dot{F}_{H(V)g}(\omega_{H(V)gm})$  БПФ-фильтров для  $R \times D$  идентичных каналов приема;  $U$  – блок-матрица выходных напряжений каналов в горизонтальной и вертикальной поляризациях;  $q_{HV}(q_{VH}), d_{HV}(d_{VH})$  – коэффициенты кроссполяризационной раз-

вязки в азимутальной и угломестной плоскостях;  $M$  – количество передатчиков;  $T$  – количество частот N-OFDM-пакета для одного передатчика.

Нижняя граница Крамера–Рао, соответствующая модели отклика ЦАР (1.90) и характеризующая дисперсии оценок амплитудных составляющих при одноэтапной демодуляции сигналов, запишется в виде

$$\sigma_A^2 \geq \sigma_n^2 \text{diag} \left[ \left( \left[ \begin{array}{c|c} (Q_H \mathbf{V}_H) \mathbf{F}_H & (q_{HV} Q_V \mathbf{d}_{HV} \mathbf{V}_V) \mathbf{F}_V \\ \hline (q_{VH} Q_H \mathbf{d}_{VH} \mathbf{V}_H) \mathbf{F}_H & (Q_V \mathbf{V}_V) \mathbf{F}_V \end{array} \right]^T \right)^{-1} \times \left[ \begin{array}{c|c} (Q_H \mathbf{V}_H) \mathbf{F}_H & (q_{HV} Q_V \mathbf{d}_{HV} \mathbf{V}_V) \mathbf{F}_V \\ \hline (q_{VH} Q_H \mathbf{d}_{VH} \mathbf{V}_H) \mathbf{F}_H & (Q_V \mathbf{V}_V) \mathbf{F}_V \end{array} \right] \right]. \quad (1.91)$$

Вполне очевидно, что обращение квадратичной формы в (1.91) является чрезвычайно сложной с вычислительной точки зрения задачей, поэтому ее решение выходит за рамки данной работы. Более простые в вычислительном отношении выражения для НГКР в случае двухэтапного оценивания создают предпосылки для реализации в перспективе адаптивного планирования частотного плана сети связи в сложной помеховой обстановке путем оперативного прогноза ошибок демодуляции сообщений на основе расчета соответствующих значений НГКР для дисперсий ошибок оценивания амплитуд сигналов. В дополнение к этому следует отметить также возможность осуществления в рамках двухэтапной демодуляции сообщений процедуры отстройки от влияния активных помех.

### *Интегрированная система связи и радиолокации*

Среди тенденций развития информационных систем специального назначения заслуживает внимания идея создания многофункциональных средств, которые объединяли бы в пределах одной аппаратной платформы решение задач, традиционно при-

сущих отдельным по назначению радиотехническим комплексам. Особенно эффективным такое объединение возможно на основе использования цифровых антенных решеток (ЦАР), примером чего является предложенная в [27] интеграция средств сотовой связи и радиолокационной разведки.

Дальнейшим развитием указанного направления стали предложенные в [90] интегрированные системы радиолокационной разведки и связи, которые базируются на применении технологии MIMO и неортогональной частотной дискретной модуляции (N-OFDM) сигналов. Дело в том, что в последнее время, для решения задач радиосвязи широкое применение находят системы MIMO. Также ведутся разработки для применения MIMO-технологии в области радиолокации. Отличие между радиолокационной станцией с традиционной системой цифрового диаграммообразования и MIMO-радаром состоит в формировании в режиме передачи не одного луча диаграммы направленности, а нескольких разных по частоте (рис. 1.11), что предоставляет возможность за счет специфической обработки сигнальной смеси в процессоре приемного сегмента достичь выигрыша в отношении сигнал-шум [66].

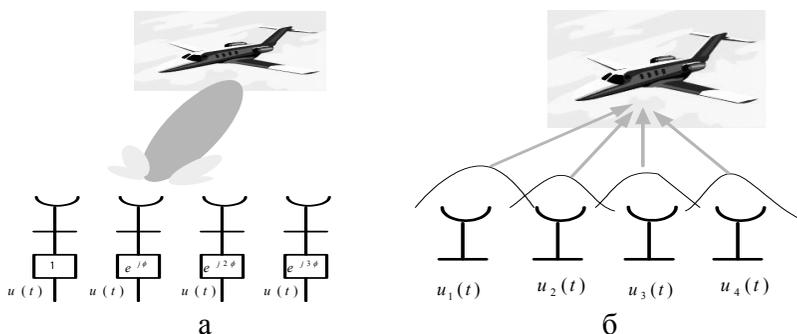


Рис. 1.11. Принцип радиолокации:  
 а) – традиционная система на основе ЦАР;  
 б) – MIMO – радар

ММО радиолокация имеет значительный потенциал для работы со слабыми сигналами, улучшения их разрешения, а также обнаружения и подавления помех. Использование этого потенциала предоставляет возможность увеличения вероятности обнаружения целей в сложных условиях информационной борьбы.

Аппаратная реализация систем связи и радиолокации на основе технологии ММО принципиально не отличается. Применение интегрированной ММО-технологии в аппаратных решениях узловых элементов тактической “информационной решетки” позволит реализовать высокую пропускную способность каналов связи, своевременно обнаружить средства воздушного нападения противника, повысит живучесть сети передатчиков за счет своевременного прекращения работы на излучение, усложнит противнику вскрытие группировки противовоздушной обороны (ПВО) и предоставит возможностям ПВО осуществить поражение противника без облучения своими РЛС.

Более широким уровнем обобщения рассмотренного интеграционного подхода является использование многопозиционной системы ММО-радиолокации в сочетании с кооперативной передачей данных в распределенных ММО-системах связи на основе внедрения многопользовательских алгоритмов ММО-связи (мульти-ММО) в сетях мобильных базовых станций. При этом возможны гибридные системы, которые объединяют в себе мульти-ММО кластеры и автономные ММО-комплексы связи и радиолокации.

Наиболее простым режимом функционирования интегрированной мульти-ММО системы является распределение во времени выполнения задач передачи данных и радиолокации (например, осуществление контроля воздушного пространства на этапе вхождения в связь). Более сложным случаем является одновременное решение радиолокационных и связных задач с кооперативной передачей данных, когда каждая из станций связи одновременно работает со всеми завязанными в сеть базовыми станциями.

Отправной точкой исследований указанных мульти-ММО систем является математическая формализация их отклика. Сложность математического описания процесса функционирования интегрированной системы связи и радиолокации (ИССР) зависит от типа ЦАР, которые используются на мобильных станциях. В простейшем случае применяются односекционные линейные ЦАР, однако для решения локационных задач целесообразно опираться на использование плоских антенных решеток. Наиболее сложным вариантом является оснащение каждой из мобильных базовых станций ИССР многосекционными плоскими ЦАР. Существенно, что используя аппарат блочных торцевых произведений матриц и произведения Хатри–Рао, все указанные случаи конструктивного выполнения ЦАР могут быть охвачены единым матричным выражением, которое описывает совокупность напряжений сигналов по выходам приемных каналов ЦАР

$$U = P \cdot A + n ,$$

где  $U$  – блочный вектор комплексных напряжений сигналов по выходам частотных фильтров пространственных каналов совокупности плоских ЦАР;  $P$  – сигнальная матрица;  $A$  – блочный вектор амплитуд сигналов;  $n$  – блочный вектор шумовых напряжений.

Для каждого из рассмотренных случаев должны использоваться свои структуры сигнальной матрицы  $P$  и блочных векторов  $U$  и  $A$ . Например, в случае излучения каждым из передатчиков активной ЦАР одночастотных сигналов на разных длинах электромагнитных волн и многосекционного построения приемных ЦАР с идентичными плоскими подрешетками в секциях, состоящими из  $R \times R$  элементов, сигнальная матрица для описания отклика отдельно взятой мобильной станции связи и радиолокации (МССРЛ) с многосекционной приемной ЦАР будет иметь вид [56]

$$P = \left( (Q \circ \tilde{H}_Q) \circledast (V \circ \tilde{H}_V) \right) \circledast F ,$$

где  $Q$ ,  $V$  – блочные матрицы характеристик направленности антенных элементов в азимутальной  $Q_{rt}(x_m)$  и угломестной  $V_{rt}(y_m)$  плоскостях в направлениях на  $m$ -й источник сигналов с угловыми координатами  $(x_m, y_m)$ ;

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11}(x_1) & \cdots & Q_{11}(x_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{R1}(x_1) & \cdots & Q_{R1}(x_M) \\ \hline \vdots & & \\ Q_{1T}(x_1) & \cdots & Q_{1T}(x_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{RT}(x_1) & \cdots & Q_{RT}(x_M) \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_{11}(y_1) & \cdots & V_{11}(y_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{R1}(y_1) & \cdots & V_{R1}(y_M) \\ \hline \vdots & & \\ V_{1T}(y_1) & \cdots & V_{1T}(y_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{RT}(y_1) & \cdots & V_{RT}(y_M) \end{bmatrix}, \quad \text{при-}$$

чем  $r = 1, \dots, R$  – порядковый номер антенного элемента в антенной решетке в соответствующей угловой плоскости в пределах секции;  $t = 1, \dots, T$  – порядковый номер секции многосекционной

$$\text{ЦАР; } \tilde{H}_Q = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{Q111} & \cdots & \tilde{h}_{Q11M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{QR11} & \cdots & \tilde{h}_{QR1M} \\ \hline \vdots & & \\ \tilde{h}_{Q1T1} & \cdots & \tilde{h}_{Q1TM} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{QRT1} & \cdots & \tilde{h}_{QRTM} \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_V = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{V111} & \cdots & \tilde{h}_{V11M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{VR11} & \cdots & \tilde{h}_{VR1M} \\ \hline \vdots & & \\ \tilde{h}_{V1T1} & \cdots & \tilde{h}_{V1TM} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_{VRT1} & \cdots & \tilde{h}_{VRTM} \end{bmatrix} - \text{блоч-}$$

ные матрицы передаточных характеристик канала ММО в азимутальной  $\tilde{h}_{Q_{rtm}}$  и угломестной  $\tilde{h}_{V_{rtm}}$  плоскостях в направлениях на  $m$ -й источник сигналов с угловыми координатами  $(x_m, y_m)$ , где  $r = 1, \dots, R$  – порядковый номер антенного элемента в антенной

решетке в соответствующей угловой плоскости в пределах секции,  $t = 1, \dots, T$  – порядковый номер секции многосекционной

$$\text{ЦАР}; F = \begin{bmatrix} F_{11}(\omega_1) & \cdots & F_{11}(\omega_Z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{S1}(\omega_1) & \cdots & F_{S1}(\omega_Z) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{1T}(\omega_1) & \cdots & F_{1T}(\omega_Z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{ST}(\omega_1) & \cdots & F_{ST}(\omega_Z) \end{bmatrix} \quad \text{– блочная матрица АЧХ } S \text{ час-}$$

тотных фильтров, синтезированных с помощью дискретного преобразования Фурье на частотах  $Z$  поднесущих  $N$ -OFDM сигналов;  $\otimes$  – символ блочного произведения Хатри–Рао.

В режиме связи демодуляция сигналов может быть осуществлена путем оптимального по методу наименьших квадратов оценивания вектора комплексных амплитуд сигналов согласно известному выражению  $\tilde{A} = (P^T P)^{-1} P^T U$  с учетом кодирования ММО-сигналов [56]. В радиолокационном режиме оцениванию подлежат элементы сигнальной матрицы  $P$ , а именно: неизвестные угловые координаты источников излучения и их частоты с учетом эффекта Допплера, при этом неизвестными амплитудами сигналов нужно пренебречь. Предложенная модель отклика многосекционной ЦАР позволяет получить нижнюю границу Крамера–Рао для дисперсий оценок параметров сигналов и осуществить анализ ее достоверности путем математического моделирования процедур обработки сигналов в приемной многосекционной ЦАР МССРЛ при решении задач связи и радиолокационной разведки.

*Проблемные аспекты многоядерной архитектуры  
построения средств цифровой обработки сигналов  
и комплексов автоматизации*

Переход к использованию встраиваемых процессорных систем на основе увеличения количества параллельно работающих ядер в одной микросхеме взамен повышения их тактовой частоты открывает новые возможности синтеза средств информационного обеспечения функционирования систем вооружений. Вместе с тем, как и всякая новая технология, многоядерность породила ряд проблем, без решения которых эффективность ее внедрения может быть низкой. Рассмотрим основные их аспекты подробнее.

Анализ множества публикаций и патентов по тематике мультипроцессинга позволяет сделать вывод о существовании на сегодня пяти основных технологий повышения быстродействия вычислительных средств [43], без использования которых эффективность многоядерной архитектуры будет сомнительной. К ним относятся:

- симметричная мультиобработка (мультипроцессинг) (symmetric multiprocessing, SMP);
- исключительный мультипроцессинг (Bound Multiprocessing, BMP);
- асимметричная мультиобработка (asymmetric multiprocessing, ASMP);
- технология виртуализации – (virtualisation technology, VT);
- комбинация нескольких или всех перечисленных вариантов.

Наиболее простой среди отмеченных технологий является **симметричная форма мультиобработки (SMP)**, в соответствии с которой прикладные программы, использующие многоядерные процессоры, разделяют общую операционную систему и память (рис. 1.12). Такая мультиобработка может быть охарактеризована как сильно связанная, она уже стала традиционной для многопроцессорных суперЭВМ и серверных приложений. Цель SMP состоит в том, чтобы динамически сбалансировать рабочую на-

грузку между доступными процессорными ядрами, оптимизируя использование ресурсов и обеспечивая пользователей максимальным быстродействием системы. В ее случае единственная установленная операционная система стремится равномерно использовать все ядра, в силу чего запускаемые приложения могут выполняться параллельно на всем их множестве (рис. 1.12).

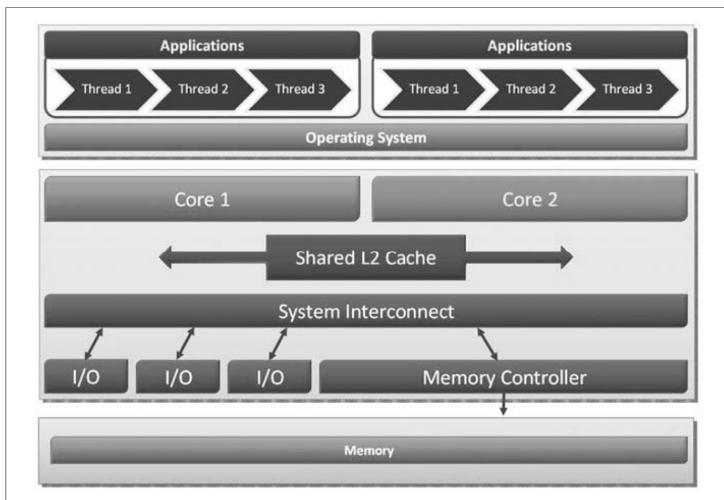


Рис. 1.12. Принцип реализации симметричного мультипроцессинга (SMP) на примере двухядерного процессора

Общность операционной системы для совокупности ядер обеспечивает централизованное распределение ресурсов между запущенными программами, повышая качество использования для них имеющихся аппаратных средств ЭВМ. Служебные инструменты операционной среды при необходимости позволяет собирать единую для многоядерной архитектуры статистику прикладных взаимодействий, упрощая тем самым отладку и оптимизацию пользовательских приложений на этапе их разработки или масштабирования для более сложных версий мультипроцессинга. В общем случае данную технологию можно рекомендовать как

начальную при создании новых проектов, использующих распараллеливание программных потоков. Задача синхронизации приложений в рассматриваемом случае решается довольно просто, опираясь на когерентное тактирование ядер и стандартные функции операционной системы вместо использования сложных механизмов межпроцессорных экранов, что облегчает подлинную мультипоточность и мультизадачное управление.

Принцип SMP может быть востребован в многочисленных встраиваемых приложениях. Однако, в случаях, где требуется детерминированное исполнение программ в реальном масштабе времени, в сочетании с комплексом средств визуализации мультимедийных данных, возможности сугубо симметричной мультиобработки в многоядерном процессоре становятся довольно ограниченными. Дело в том, что наличие единственной операционной системы, доступной всем ядрам, может привести к ситуациям, когда две или больше нитей программного кода попытаются обратиться к одной и той же области операционной системы одновременно. В этом случае доступ к ресурсам получит только одно из ядер, а остальные будут простаивать до высвобождения критической области операционной системы. Естественно, такие ситуации приводят к резкому снижению производительности многоядерного процессора.

Особенно критичны к подобным явлениям архитектуры SMP, реализуемые на основе монолитных операционных систем, большинство функциональных возможностей которых сосредоточено в единственном исполняемом файле. Примером таковой является Windows CE. Из-за большого размера монолитных операционных систем, операционные запросы в них обычно занимают длительный период времени для выполнения. Поэтому в последнее время многие поставщики операционных оболочек всерьез занялись проблемой внедрения микроядерной архитектуры в свои разработки [43]. В отличие от монолитной концепции построения, микроядерная архитектура рассредоточивает свои функциональные возможности по максимально возможному ко-

личеству отдельных файлов, оставляя в основном исполнительном модуле только ядро с минимальным набором управляющих функций, позволяющих делегировать способности управления процессами другим модулям операционной системы. В результате вся обработка данных, функции ввода-вывода и другие операции обеспечиваются во внешних по отношению к такому микроядру процессах [43]. Сокращение размеров микроядра ведет к уменьшению длины критических нитей, а, следовательно, позволяет упростить симметричную мультиобработку, минимизировать простои ядер процессора. В пределе, микроядро операционной может быть сведено до уровня менеджера запросов, распределяющего заявки на доступ к ресурсам по внешним, порой абсолютно идентичным процессам. Обычно же микроядро контролирует доступ к аппаратному уровню, регулирует синхронизацию между параллельными процессами, резервирует и освобождает память, создает, закрывает и планирует нити исполняемого кода, поддерживая их синхронизацию с помощью семафоров, а нередко контролирует и операции ввода-вывода.

Для снижения остроты проблемы совместного доступа к ресурсам той же компанией QNX Software Systems была предложена модификация SMP, получившая наименование **исключительной многопроцессорности** (Bound Multiprocessing, BMP) [43]. Как и в случае традиционной симметричной технологии, в этом режиме одна операционная среда полностью контролирует все аппаратные и системные средства, динамически распределяя их между приложениями. Однако при этом во время инициализации приложений пользователь может указать, чтобы одно или несколько из них выполнялось только на заданном ядре, независимо от того, простаивают ли другие ядра. При этом разработчик берет на себя задачу распределения ядер между приложениями, исключая конфликты переполнения общей для процессора кэш-памяти.

Кардинальным решением проблемы борьбы за общие ресурсы является технология **асимметричной мультиобработки** (рис. 1.13). Следует отметить, что асимметричный мультипроцессинг

(ASMP) полезен для приложений, которые не могут эффективно выполняться в рамках единой операционной системы. В простейшем случае, на каждом ядре процессора при ASMP функционирует отдельно установленная системная оболочка той же самой версии, что и на остальных ядрах. Однако, в более сложном варианте для каждого или части ядер используется своя уникальная операционная система (рис. 1.13), в том числе реального и «нереального» времени.

Наиболее удобной для реализации потенциальных возможностей ASMP архитектурой мультиядерного чипа является вариант с максимальным разделением физических границ ядер, например, с полностью разделенными кэшами второго и первого уровней [43].

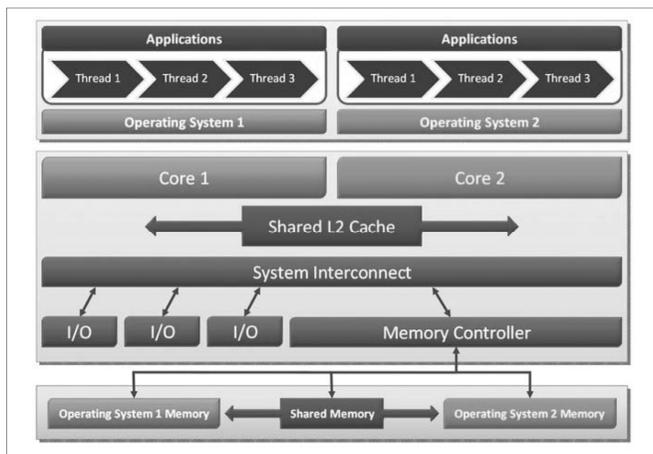


Рис. 1.13. Принцип реализации асимметричного мультипроцессинга (ASMP)

Существенно, что асимметричная процедура – это единственная технология, в которой различные операционные системы могут быть использованы параллельно на физическом уровне. В случае асимметричной обработки мультиядра, по сути, представ-

ляют собой жестко разделенные ресурсы аппаратных средств ЭВМ, причем распределение имеющихся аппаратных ресурсов обычно обеспечивается в процессе запуска ЭВМ и является статическим, неизменным во времени. На физическом уровне этот процесс затрагивает также средства хранения данных, использование периферии и обработку прерываний. В дополнение к сказанному, система динамически назначает ресурсы межпроцессорной коммуникации, что делает координацию между ядрами сложным процессом.

Такой менеджмент ресурсов целесообразно в дальнейшем расширить в направлении предоставления разработчику возможности жесткого закрепления конкретных ядер за интересующими его приложениями, используя нумерацию ядер подобно регистрам классического одноядерного процессора. Это позволит избежать временных затрат на динамичное перераспределение периферийных ресурсов, предоставит возможность пользователю жестко закреплять встроенные в процессор контроллеры ввода-вывода за соответствующими аппаратными модулями, о чем речь пойдет дальше.

Следует отметить, что в классической асимметричной системе мультиобработки любая задача всегда обрабатывается внутри одного и того же ядра от начала до ее завершения, даже в том случае, если остальные ядра в этот момент времени свободны. Хотя отдельные ядра могут использоваться в крайне напряженном режиме или иметь недостаточную нагрузку, главное преимущество такого подхода состоит в том, что каждое из приложений функционирует надежно и независимо.

Применительно к двух- и четырехядерной конфигурациям процессоров эта форма мультиобработки гарантирует устойчивое функционирование аппаратных средств ЭВМ в тех промышленных применениях, где прежде не представлялось возможным осуществлять многозадачность в одной системе. В качестве примера подобного рода можно указать радиолокационную станцию

с цифровой обработкой сигналов. В данном случае на одном из ядер процессора обеспечивается запуск операционной системы реального времени для реализации ввода первичных радиолокационных данных, а на другом ядре (ядрах) – производится обслуживание последующих процессов визуализации траекторных параметров сопровождения трасс обнаруженных целей и передачи данных потребителям. Хотя такое распределение задач зачастую может не быть оптимальным по быстродействию, это неважно, ибо критическим фактором является, в данном случае, надежность и эффективность выполнения асимметричных процедур, комбинирующих обработку данных по принципу «2 в 1».

В дальнейшем, с приходом на смену двухядерным процессорам мультиядерных решений (первые образцы четырехядерных процессоров Core 2 Quad от Интел уже были доступны тестерам в сентябре 2006 г.) станет возможной реализация многозадачности по принципам «4 в 1» и «8 в 1». В результате споры относительно того, являются ли ядра полностью используемыми, в конечном счете, станут излишними. С увеличением количества ядер до 4 и более сфера предпочтительных решений сместится к реализации в одном процессоре комбинаций асимметричных и симметричных процедур мультипроцессинга, что обеспечит эффективную по быстродействию альтернативу доступным сегодня для дуальных ядер версиям системного менеджмента. При этом как актуальное свойство неизбежно будет востребована возможность реализации механизма произвольного объединения ядер в кластеры и предоставления функций межкластерного распараллеливания задач. К примеру, в 8-ядерном процессоре как вариант в этом случае можно реализовать симметричные мультипроцессинги на двухядерном и трехядерном кластерах, а оставшиеся три ядра использовать для ассимметричного распараллеливания приложений. Над внедрением подобной технологии работают специалисты AMD, разрабатывая архитектуру «агрегированного ядра», позволяющую нескольким физическим ядрам выступать в

роли одного виртуального. Пока неясно, в какой мере эта концепция воплотит идею множественной кластеризации ядер, однако уже сам факт таких разработок способен породить лавинообразный процесс внедрения подобных решений среди фирм-производителей мультичипов.

Другим направлением конвергенции SMP и ASMP является переход к мультимикроядерной архитектуре операционных систем, при которой операционная среда имеет не одно микроядро, как принято, а несколько. Каждое из таких микроядер исполняется на своем ядре процессора, причем сами микроядра могут быть идентичными или же контролировать непересекающиеся аппаратные ресурсы. При этом часть ядер или кластеров чипа занимают указанные микроядра ОС, а остальные – отводятся для выполнения внешних процессов единственной установленной на системе операционной среды. Таким образом, данная идея воплощает в себе асимметричный мультипроцессинг на уровне микроядер операционной системы, и симметричную мультиобработку – на уровне внешних по отношению к ним программных нитей и драйверов.

Пока же, в нынешней «двухядерной реальности», интеграция симметричного и асимметричного мультипроцессинга может осуществляться в рамках **технологии виртуализации (VT)**. Эта концепция была разработана еще в конце 60-х годов прошлого века. Суть ее сводится к использованию специальной управляющей программы, называемой монитором виртуальных машин, которая работает непосредственно с аппаратным обеспечением, контролирует запуск и функционирование в рамках одной операционной системы множества виртуальных машин, на каждой из которых может быть реализована своя операционная среда (рис. 1.14). Виртуальные разделы (partition) должны жестко изолироваться друг от друга с точки зрения используемого процессорного времени и оперативной памяти. При этом на уровне ядер программные процессы выполняются по технологии симметричного

распределения задач и ресурсов, а на уровне пользователя – реализуется принцип виртуальной асимметричности.

Такое решение упрощает управление аппаратными средствами ЭВМ, освобождая прикладных разработчиков от необходимости обработки межпроцессорных коммуникаций.

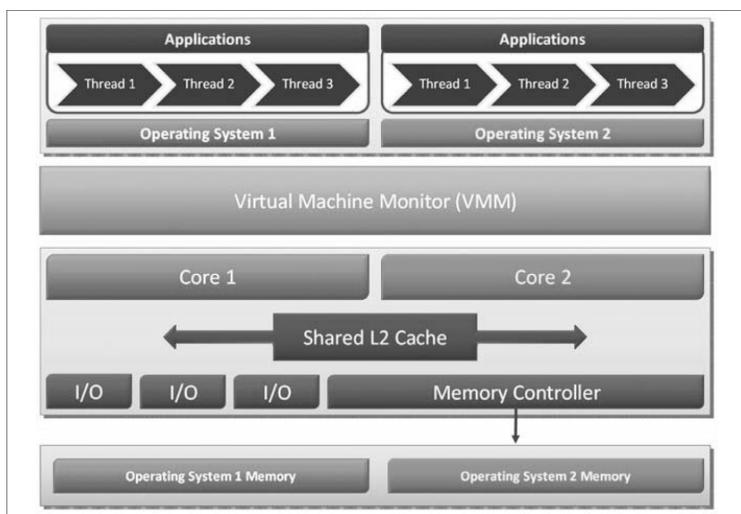


Рис. 1.14. Технология виртуализации (VT)

Учитывая, что в рамках VT процессы, которые могут находиться в противоречии с друг другом на единственных основных системах, оказываются разграниченными и полностью изолированными от остальных, стабильность полных систем улучшается. Виртуальное разделение ресурсов с помощью VMM (рис. 1.14) может быть адаптивно переназначено, согласуясь с текущими потребностями по ходу выполнения задач всей совокупностью виртуальных машин. Высокая степень абстракции и замкнутости виртуальных оболочек процессов позволяет приложениям «кочевать» от одного сервера к другому, что было невероятно до недавнего времени, и предоставляет новые возможности для уда-

ленного администрирования и реконфигурации системных архитектур. Существенно, что новые процессорные технологии фирмы Интел способствуют становлению VT в качестве стандарта для всех аппаратных платформ и операционных систем. При этом заметно снижается острота проблемы достижения аппаратной независимости программного обеспечения.

Наконец, виртуализация уже сегодня предлагает новый вариант программной интеграции в единой системе автономных приложений, требовавших прежде аппаратного разнесения на несколько ЭВМ (брандмауэры, серверы данных и т.п.). Это способствует достижению заметной экономии в стоимости оборудования.

Технология виртуализации может быть применена и в рамках асимметричной процедуры на отдельно взятых ядрах. При этом возможны два основных варианта комбинации VT и ASMP, отличающиеся первичностью одной из этих технологий. В простейшем из них, при наличии достаточного количества ядер, каждой или части виртуальных машин может назначаться для выполнения свое процессорное ядро, причем монитор виртуальных машин (VMM) является общим для всех ядер. В этом случае первичную роль выполняет технология виртуализации. Этот метод во многом похож на технологию исключительного мультипроцессинга (BMP), с той лишь разницей, что за конкретным ядром закрепляется не отдельное приложение, а целая виртуальная машина, со своей внутренней операционной системой. Разновидностью данного подхода является так называемый метод паравиртуализации [43], согласно которому для повышения надежности функционирования ядра операционной системы каждый из драйверов или все драйверы устройств исполняются в режиме виртуальной машины.

В более продвинутом решении первичной становится асимметричность обработки, и на каждом ядре или их кластере функционирует свой VMM, обслуживающий совокупность несколь-

ких виртуальных машин. Такие комбинированные методы мультипроцессинга, объединяющие VT и ASMP, при их реализации на основе ОС реального времени позволяют извлечь дополнительный выигрыш от многоядерных решений, который может быть существенным в случае сложных систем управления. По этой причине данный подход используется во многих промышленных приложениях, работающих в режиме реального времени.

Однако, пока что целесообразность запуска ОС реального времени (ОСРВ) в режиме отдельной виртуальной машины представляется весьма сомнительной из-за недостаточного быстродействия известных операционных систем. Действительно, довольно нелепой выглядела бы попытка установить ОСРВ как виртуальный раздел из-под Windows XP Embedded или Linux. Указанный режим матрешечной виртуализации ОСРВ станет оправданным только в случае использования монитора виртуальных машин на основе такой же ОСРВ. К сожалению, следует отметить, что на данный момент на рынке программного обеспечения выбор полноценных ОС реального времени, реализующих функции поддержки виртуальных машин, весьма ограничен.

Наиболее полно критериям и требованиям, предъявляемым к встраиваемым системам, отвечает сегодня архитектура ОСРВ LynxOS-178 фирмы LynuxWorks (<http://www.lynuxworks.com>). По сравнению с описанной выше технологией виртуализации, в ОСРВ LynxOS-178 дополнительно предусматривается, что каждое из приложений, а не вся операционная среда с массой программ, должно выполняться независимо. При этом виртуальные разделы (partition) представляют собой совокупность некоторого приложения и так называемой POS (Partition Operating System) – операционной системы раздела. На рис. 1.15 [43] показан пример реализации архитектуры системы на базе ОСРВ LynxOS-178 с несколькими изолированными разделами, каждый из которых является самостоятельным приложением. Все данные и программный код в отдельном разделе линкуются вместе и выпол-

няются в пользовательском режиме. Ядро (Kernel) LynxOS-178 представляет собой модульную операционную систему (MOS, Module Operating System), компоненты которой совместно с BSP (Board Support Package) функционируют в супервизорном (Supervisor) режиме.

Асинхронизм прерываний, как известно, является главной проблемой любой ОСРВ. Особого внимания эти события заслуживают в свете необходимости изоляции виртуальных разделов. Важно, чтобы прерывания в одном из них не влияли на время выполнения процессов и обращение к памяти в остальных. Как известно, наиболее распространенным генератором прерываний являются таймеры. В LynxOS-178 они управляют диспетчеризацией событий как внутри POS, так и в самой MOS. Чтобы исключить взаимное влияние прерываний между разделами реализуется ряд требований. Прежде всего, прерывания таймера могут возникать только в супервизорном режиме, тогда как в пользовательском режиме прямой доступ к таймерам невозможен. При активности какого-либо раздела (захвате им процессорного времени), ему должны переадресовываться все касающиеся этого раздела внешние временные события. В течение интервала пассивности раздела все относящиеся к нему прерывания откладываются и сохраняются для последующей передачи ему при очередной активизации.

Важнейшим источником прерываний могут быть устройства ввода-вывода. По требованиям ARINC 653, для реализации синхронной передачи данных следует применять метод регулярного опроса устройств. Если же операции ввода-вывода требуют обработки прерываний, то соответствующий поток прерывающих событий должен обрабатываться на уровне MOS и лишь затем переадресовываться в POS активного раздела. К сожалению, при такой технологии ввода-вывода могут возникать временные задержки на интервал цикличности активности виртуальных разделов. Чтобы избежать при этом возможных потерь информации

разработчикам следует заранее принимать меры по недопущению такого рода коллизий.

Независимо от выбранного метода, программист многоядерной системы должен, прежде всего, позаботиться о существенном уменьшении размеров задач или длины нитей при выполнении параллельного программирования. Это позволит максимизировать детализацию структуры программного кода и тем самым гарантировать оптимальное использование доступных ресурсов. Особого внимания с его стороны заслуживают процессы, которые могут выполняться независимо, но, тем не менее, требуют информации от других задач, чтобы получить правильный результат. Это касается приложений, которые "ждут" друг друга и поэтому могут взаимно заблокировать свои процессы полностью, вплоть до зависания системы. Поэтому коммуникационные обращения к данному виду взаимозависимых задач должны осуществляться на основе четко регламентированных правил, гарантирующих "целостность" распределенных действий.

Помимо архитектуры, соответствующей ARINC 653, существуют и другие подходы к реализации изолированных разделов. Более того, внутри самого семейства тех ОСПВ, которые удовлетворяют формальным признакам ARINC 653, также наблюдается отсутствие однообразия механизмов виртуализации. Например, в отличие от LynxOS-178 некоторые программные продукты реализуют не только одноуровневую диспетчеризацию, управляя виртуальными разделами, но и двухуровневую, с изоляцией как разделов, так и процессов внутри них.

Все это разнообразие является следствием неизбежных издержек интенсивного развития данной отрасли программного обеспечения. Однако при всех тех огромных достижениях, которыми программные средства встретили появление многоядерных процессоров, до оптимального управления подобными ресурсами еще достаточно далеко. Насущной необходимостью является реализация поддержки в ОСПВ виртуальных машин, сгенериро-

ванных в других программных платформах, в том числе, в операционных системах типа Windows XP Embedded, Linux и др. Важно, чтобы дальнейшее развитие ОСРВ в рамках технологии многоядерности шло по пути, если не интеграции конкурирующих ныне продуктов, то хотя бы создания шлюзов для поддержки на одной ОСРВ виртуальных технологий различных разработчиков с возможностью переноса виртуальных разделов, например, операционной системы QNX в ОСРВ LynxOS-178 и наоборот. Без этого строить гибкие многоядерные системы в конкурентоспособное время будет довольно сложно.

Другим проблемным вопросом является функциональность аппаратной реализации процессорных модулей на основе многоядерных технологий. В настоящее время на рынке встраиваемых систем появились многоядерные модули в стандарте Compact PCI. Однако очевидно, что максимальная реализация потенциальных возможностей многоядерных архитектур возможна только с переходом на спецификацию Compact PCI Express, ATCA или к аналогичным интерфейсам, использующим последовательно-параллельные шины. Речь идет об упоминавшейся уже задаче обеспечения управляемого раздельного доступа ядер к канала ввода-вывода.

Уровнять шансы Compact PCI и Compact PCI Express в некотором смысле могло бы позволить усовершенствование спецификаций типа PICMG 1.16, 1.20. Суть необходимой доработки состоит в предоставлении каждому из ядер независимых шлюзов на часть или же все каналы Ethernet. Однако такая доработка представляется слишком радикальной и нуждается в создании не только специализированных чипсетов, реализующих функции шлюзования встроенных в многоядерный микропроцессор каналов PCI Express на линии Ethernet, но и совершенствовании архитектуры самих процессоров в направлении расширения номенклатуры адаптеров ввода-вывода. Примером тому могут служить сигнальные процессоры фирмы Texas Instruments TMS320C6455,

в которых помимо адаптеров гигабитной Ethernet имеются встроенные каналы высокоскоростного интерфейса RapidIO (до 12 Гигабит/с). Однако недостатком как процессоров Интел, АМД, так и процессоров Texas Instruments и других фирм, производящих мультиядерные чипы, является пока слишком узкий набор встроенных контроллеров, отсутствие трансиверов RocketIO, новейших версий LVDS и др.

В этом смысле примером удачной технической политики является архитектура ПЛИС Virtex 7 фирмы XILINX, в топологии которой в большом ассортименте содержатся контроллеры практически всех известных интерфейсов ввода-вывода, причем этот перечень постоянно обновляется и совершенствуется как аппаратно, так и за счет модулей программной реконфигурации.

Возможным вариантом решения проблемы адаптации контроллеров ввода-вывода, заложенных в кристалл многоядерного процессора, под нужды разработчиков встроенных систем явилась бы конвергенция многоядерного процессора и технологии ПЛИС, по которой бы выполнялись встроенные адаптеры интерфейсов. Физической основой такой интеграции процессоров и ПЛИС является общность методов приемопередачи сигналов для многих из интерфейсов, в частности, использование принципа LVDS в PCI Express, RapidIO, трансиверах RocketIO и др. В этом случае разработчик при проектировании своей системы мог бы произвольным образом сконфигурировать узлы ввода-вывода ядер процессора, загрузив соответствующие конфигурационные модули в те области кристаллов, где реализована технология ПЛИС. В итоге, в распоряжении создателей встраиваемых систем появились бы беспрецедентно гибкие по настройке интерфейсных возможностей гибридные многоядерные процессоры, которые могли бы напрямую, в обход коммутирующих чипсетов, стыковаться через шинные буферы с разъемами устройств ввода-вывода данных. На первых порах можно было бы пойти по пути размещения кристаллов ПЛИС и многоядерного чипа в одном

корпусе, подобно тому, как Интел создала свой первый серийный четырехядерный чип из пары двухядерных кристаллов.

Подобная гибридная технология очень важна для повышения быстродействия облачных вычислений и систем цифрового формирования луча в цифровых антенных решетках. Дело в том, что для таких задач в идеале каждое ядро должно иметь хотя бы часть своих независимых каналов ввода-вывода, например, на базе нескольких дифференциальных линий PCI Express. В результате ввод-вывод данных при обслуживании многоядерным процессором модулей цифровой обработки сигналов станет независимым и полностью параллельным во времени. Кроме того, на этой основе удастся исключить необходимость переконфигурации системы при ее включении. Назначив конкретным устройствам ввода-вывода те или иные ядра процессора, можно будет не заботиться о том, что после очередного выключения система поведет себя неконтролируемым образом. Это крайне важно, например, для встраиваемых систем, реализующих алгоритмы цифрового формирования лучей в базовых станциях сотовой связи, радиолокации, спутниковой навигации и др. приложений, где непременным условием является постоянная однозначная привязка ресурсов ввода данных к выходам конкретных антенных элементов решетки.

Таким образом, теоретически индустриальный компьютер с двумя или больше ядрами способен к большей производительности, чем одноядерный процессор, при условии, что распределение программных и аппаратных ресурсов системы будет соответствующим. Тесты, к примеру, модулей фирмы Kontron, показали, что двухядерные процессоры близки к достижению производительности, обещанной в теории. Сравнение быстродействия модуля, содержащего двухядерный Intel Core™ Duo (2,16 ГГц), и модуля на основе процессора Intel Pentium M 756 (2,1 ГГц) свидетельствует, что для идентичных частот и обычных офисных приложений производительность по операциям с плавающей за-

пятой возрастает на 96,5%, а по операциям целочисленной арифметики – на 89,3%. Что же касается ускорения операций ввода-вывода, то над этой проблемой, в свете указанных выше идей, еще предстоит потрудиться всем разработчикам, начиная с той же Интел. В результате, соответствующий прирост скорости станет более существенным, сообразно не только количеству ядер, но и с учетом увеличения параллельных каналов передачи, а также исключения из интерфейсных линий коммутирующих чипсетов и маршрутизаторов потоков данных там, где они излишни.

## 1.2. Синтез средств связи

Основы анализа и синтеза средств связи, которые изложены в подразделе, представлены теоретическими материалами о закономерностях, тенденциях и перспективах развития средств связи и автоматических систем управления (АСУ) в контексте определения эффективности их функционирования как средств вооружения [16].

Анализ эффективности функционирования средств связи и АСУ актуален не только в силу возможности выявления лучших из них, но и благодаря установлению перспектив их развития в мире. Закономерности и тенденции, обнаруженные при этом, являются основанием для решения проблемы анализа и синтеза средств связи и АСУ. Учитывая ограниченный объем монографии, анализ и синтез средств связи представлены конкретным материалом о развитии теории адаптивной компенсации быстрых замираний (БЗ), медленных замираний (МЗ) сигнала и потерь усиления антенн при тропосферном распространении радиоволн (ТРР). А анализ и синтез АСУ отражен материалом о развитии теории системы управления связью, в частности, развитием теории адаптивных автоматов для средств связи и АСУ связи. Такой подход позволяет синтезировать средства связи и АСУ связи, ко-

# РАЗДЕЛ 4

## СИНТЕЗ СРЕДСТВ ОБЕСПЕЧЕНИЯ СИСТЕМ ВООРУЖЕНИЯ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

### 4.1. Концептуальные основы синтеза

Актуальным и определяющим свойством нового поколения радиотехнических систем (РТС) является выполнение их антенных устройств по технологии цифровых антенных решеток (ЦАР) [44], относимых рядом зарубежных специалистов к Smart-антеннам. В данном контексте слово Smart означает буквально "умные" антенны. Неслучайно в качестве синонима этому направлению в антенной технике довольно часто употребляют также термин "интеллектуальные антенны" (Intelligent Antenna).

В середине 90-х годов прошлого века стремительный рост количества и качества зарубежных проектов, нацеленных на внедрение технологии цифрового формирования характеристик направленности антенных решеток, привел к появлению первых серийных образцов радиотехнических систем с ЦАР.

К этому времени данная технология уже стала стандартом высокоэффективного гидроакустического оборудования, систем ультразвуковой диагностики, где сравнительно невысокие частоты сигналов позволили значительно раньше внедрить многоканальную цифровую обработку сигналов. За последнее десятилетие произошла смена поколений таких систем, с появлением вместо сравнительно малоканальных датчиков продвинутых цифровых решеток, содержащих по 512-1024 каналов обработки сигналов.

В отличие от гидроакустических и диагностических приложений радиотехнические системы лишь недавно вступили в этап массового внедрения ЦАР.

Теоретические основы такого подхода к построению антенных систем были заложены еще в 60-е – 80-е годы прошлого века, но лишь в настоящее время с развитием микроэлектроники начался этап практической реализации накопленного научного задела. В СССР наиболее последовательным приверженцем данного направления в антенной теории явилась киевская научная школа, возглавляемая Заслуженным деятелем науки и техники Украины, доктором технических наук, профессором Варюхиным Владимиром Алексеевичем.

Межведомственное научно-техническое совещание, проведенное в 1977 г. Научным Советом АН СССР по проблеме «Статистическая радиофизика» (председатель – академик Кобзев Ю.Б.) и Филиалом противовоздушной обороны (ПВО) Сухопутных войск (СВ) Военной артиллерийской академии (ВАА) им. М.И. Калинина (г. Киев), придало официальный статус термину «приемная цифровая антенная решетка» и признало приоритет научной школы Варюхина В.А. в разработке и практической реализации соответствующей теории, датировав начало исследований, выполнявшихся под руководством Варюхина В.А., 1962 годом.

Плодом активной научной деятельности коллектива Варюхина В.А. можно считать широкую популяризацию идеи ЦАР в СССР, уровень которой, не в последнюю очередь, позволил существенно расширить круг специалистов, убежденных в перспективности данной технологии для нужд радиолокации, гидроакустики и других приложений. В итоге существенно расширилась география приверженцев данного направления за счет вовлечения в число исследователей ученых Харькова, Москвы, Нижнего Новгорода, Житомира, Николаева и других научных школ.

Как следствие предпринятых усилий, к началу 1990-х годов в СССР существовал весьма представительный ряд научных коллективов, совокупные достижения которых по многим теоретическим и практическим вопросам создания и алгоритмизации ЦАР не уступали аналогичным разработкам в США и Западной Европе, а порой даже опережали их в своем развитии.

Постепенно столь мощный научный задел в теории ЦАР, опирающийся на развитие цифровой микроэлектроники, начал способствовать успехам и в практическом освоении принципиально новой радиолокационной техники. Подтверждением тому могут служить, например, уникальные в своем роде РЛС Нижегородского НИИРТ 55Ж6У и 1Л119 (Небо-СВУ), в которых впервые для серийных мобильных систем ПВО было реализовано цифровое диаграммообразование в метровом диапазоне волн, РЛС "Противник-Г" (ННИИРТ), а также ряд РЛС с ЦАР, входивших в систему предупреждения о ракетном нападении (СПРН). Однако отставание в развитии элементной базы, подогретое разрывом экономических связей на постсоветском пространстве и отсутствием должного финансирования новых разработок, привело к утере Россией и Украиной многих из завоеванных ранее приоритетов.

Ситуация же за рубежом в вопросах внедрения ЦАР отчетливо характеризуется существенным расширением сфер их применения на фоне значительного удешевления серийных образцов и роста их функциональных возможностей.

В настоящее время в армиях ведущих зарубежных государств осуществляется переход к новому стандарту радиолокационного вооружения, предполагающему безальтернативное использование технологии цифрового диаграммообразования. В отличие от стран СНГ, где при разработке РЛС с ЦАР в силу исторических и объективных причин основные усилия направлялись на создание систем наземного базирования, за рубежом наиболее активно такого рода проекты первоначально финансировались в интересах военно-морских ведомств. Дело в том, что от боевых кораблей требуется постоянная готовность к отражению интенсивных атак комбинированных средств нападения, в частности ракет, авиации, наземных ударных систем, действующих при этом в обстановке сложных активных помех, отражений от береговой линии, местных предметов и морских волн. Поскольку во многих ситуа-

циях время, отводимое на обнаружение целей, предельно мало, существенно, чтобы выявление и сопровождение слабоотражающих летательных аппаратов выполнялось на максимальной дальности до них. В этой связи стремление к широкомасштабному внедрению технологии цифрового формирования луча (digital beamforming), используемой как на прием, так и на излучение зондирующих сигналов, становится вполне объяснимым.

Использование ЦАР в наземных средствах зарубежных комплексов противовоздушной и противоракетной обороны также началось с освоения длинноволнового диапазона электромагнитного спектра. Среди такого рода РЛС следует отметить загоризонтные радиолокаторы фирмы Marconi, бистатическую загоризонтную РЛС ОТН-В (Китай, побережье Южно-Китайского моря), загоризонтные РЛС HSWR (Канада, мыс Bonavista и мыс Race в районе Ньюфаундленда). Наряду с решением задач контроля воздушного и надводного пространства на основе указанных систем дополнительно выполняются научно-исследовательские работы по поиску оптимальных методов обработки сигналов, набора статистических данных.

Одной из первых ЦАР метрового диапазона волн явилась стационарная французская РЛС RIAS, разработанная фирмой Onega и развернутая на полигоне корпорации Thomson в Нормандии. Среди представителей РЛС с ЦАР в более высокочастотной области спектра можно назвать РЛС американской системы тактической ПРО THAAD (разработана фирмами Lockheed Martin и Raytheon Company (США)), принятые на вооружение корабельные РЛС SAMPSON от Siemens Plessey, корабельные и сухопутные варианты обзорной РЛС S1850M (Smart-L) совместной разработки фирм Thales Nederland (ранее Hollandse Signaalapparaten BV, SIGNAAL) и BAE Systems Insyte (ранее Alenia Marconi Systems UK).

В классе РЛС малой дальности ЦАР используются в радарх Smart-S (фирма Signaal), сухопутном и корабельном вариантах

РЛС GIRAFFE AMB (Agile Multi Beam) шведской фирмы Ericsson Microwave Systems AB. Примером успешного использования ЦАР в РЛС малой дальности действия (до 20 км) стала также тактическая РЛС CLOSE LPI шведской фирмы CelsiusTech Systems.

Серийному выпуску РЛС с ЦАР сопутствует большое количество опытных образцов РЛС с ЦАР различного назначения, среди которых необходимо упомянуть:

- канадскую РЛС EARS (Experimental Array Radar System) по проекту DREO (диапазон частот 8,9-9,4 КГц, эксплуатируется на полигоне у реки Оттава);

- РЛС TEP (Turbulent Eddy Profiler) корпорации Quadrant Engineering Inc. (США) для профилирования турбулентной структуры первого километра атмосферы;

- РЛС малой дальности FOPAIR (Focused Phased Array Radar) корпорации Quadrant Engineering Inc. (США) (диапазон частот 10 ГГц);

- германскую вертолетную РЛС с синтезированием аппертуры на базе 56-элементной ЦАР (фирма DLR);

- шведскую самолетную РЛС бокового обзора CARABAS-II с синтезированием аппертуры на базе ЦАР;

- радар шведского самолета ДРЛО S100B Argus, разработанный фирмами Saab Tech Electronics AB и Ericsson Microwave Systems AB.

Перечень рассмотренных вариантов реализации ЦАР для нужд радиолокации является далеко неполным и непрерывно расширяется. Интенсивность финансирования соответствующих НИОКР и их многообразие подтверждают факт превращения цифрового формирования луча в основную технологию синтеза современных РЛС.

Учитывая целый ряд преимуществ, которые в совокупности с полноценной цифровой обработкой обеспечивают новые подходы к синтезу радиолокационных систем, остановимся на их рассмотрении подробнее.

Прежде всего, заслуживает внимания тот факт, что РЛС с ЦАР являются высокоинформативными приемными системами, способными воспринять всю информацию, содержащуюся в пространственно-временной структуре электромагнитных полей, и практически без потерь трансформировать ее в информацию о наличии и параметрах объектов сложной воздушно-помеховой обстановки.

Цифровое формирование диаграммы направленности излучателей в радиолокационных платформах позволяет добиться высокой идентичности амплитудно-фазовых характеристик приемных каналов, обеспечивая возможность коррекции их под заданный эталон с устранением неизбежных технологических погрешностей, возникающих в процессе изготовления. При этом достигается высокая чувствительность приемной системы в сочетании с длительной стабильностью параметров тракта обработки. Как следствие, отпадает надобность в частой калибровке приемных устройств за счет отсутствия свойственных аналоговым цепям параметрических уходов и потерь, что приводит, в свою очередь, к высокой эксплуатационной надежности РЛС.

Цифровое диаграммообразование является той технологией, опираясь на которую можно эффективно реализовать гибкое управление размерами, формой, направлением парциальных лучей диаграммы направленности антенны, интенсивностью излучения (для режима зондирования) и чувствительностью к приему сигналов. При этом количество синтезируемых лучей фактически неограниченно, а их характеристики могут быть оптимизированы для каждой миссии, типа целей и текущего состояния окружающей среды.

Реализация концепции цифровых решеток открывает широкие перспективы для сокращения времени формирования радиолокационных изображений целевой обстановки за счет одновременного многолучевого приема сигналов во всем рабочем секторе. При этом облучение пространства может выполняться расфоку-

сированным сигналом передатчика с "засветкой" широкого телесного угла, а реализация сверхрелеевской разрешающей способности по направлениям прихода сигналов, их доплеровской частоте и времени задержки способствует достижению требуемой детализации изображений.

Следует подчеркнуть, что в настоящее время известен достаточно обширный арсенал методов сверхразрешения, реализация которых, в зависимости от отношения сигнал/шум, позволяет отдельно селектировать до десяти и более "точечных" объектов в пределах главных лепестков приемной диаграммы направленности.

В целом же цифровое формирование луча обеспечивает близкие к потенциальным точность оценивания параметров сигналов, их осевое, поперечное и контрастное разрешение с улучшенной дифференциацией по яркостному признаку благодаря высокому, недостижимому в аналоговой технике динамическому диапазону. В свою очередь, цифровое формирование высокоидентичных частотных фильтров на выходах приемных устройств является гарантом глубокой компенсации широкополосных помеховых сигналов. В совокупности с наращиванием динамического диапазона при накоплении сигналов в процессе пространственно-временной обработки это создает условия для реализации высокой помехозащищенности РЛС.

Как справедливо отмечается в рекламных проспектах фирм-производителей, на основе технологии цифрового диаграммообразования может быть получена максимальная унификация узлов и блоков аппаратуры, простота реконфигурации и модификации радиолокационных систем, сводящаяся зачастую лишь к замене программного обеспечения.

Наконец, благодаря запоминанию и задержке практически на неограниченное время больших информационных массивов при цифровом формировании луча, возможна многократная модификация оцифрованных данных в процессе визуализации с использованием разнообразных программных фильтров, улучшающих

восприятие радиолокационных портретов, как операторами, так и автоматическими средствами поддержки принятия решений.

Способность РЛС с ЦАР к многосигнальному "широкоформатному" приему создает условия для существенного повышения их живучести при разнесенном функционировании приемных и зондирующих подсистем. За счет организации многопозиционных комплексов на базе приемных РЛС с ЦАР возможно преодолеть большинство известных недостатков, присущих аналогичным системам, построенным в рамках традиционных подходов (с электронной либо механической перестройкой узкого приемо-передающего луча).

При выполнении приемо-передающих модулей ЦАР на основе программно-реконфигурируемой архитектуры может быть в полной мере воплощен в жизнь принцип интегрированной апертуры, то есть объединения антенных систем и высокочастотных блоков всех типов радиотехнических средств в единую структуру с минимизацией аппаратуры и побочных радиоизлучений. На борту боевых средств речь идет об интеграции систем радиолокации, радио- и спутниковой навигации, радиотехнической разведки, радиосвязи, радиопротиводействия (постановки помех) и определения госпринадлежности. При этом достигается оперативная функционально-ресурсная адаптация архитектуры бортового радиоэлектронного оборудования и существенно возрастает эффективность всего бортового радиоэлектронного комплекса.

Основной особенностью современных схемных решений, реализующих технику цифрового диаграммообразования в РЛС, является установка аналого-цифровых преобразователей (АЦП) в каждом приемном канале с оцифровкой сигналов на промежуточной либо несущей частоте (рис. 4.1).

При этом, как минимум, исключается операция детектирования сигналов с выделением их огибающей, что сокращает энергетические потери, повышает чувствительность приемных систем и упрощает их аппаратную реализацию. Сигнал такта на все аналого-цифровые преобразователи разводится от общего генератора

тактовых импульсов с таким расчетом, чтобы АЦП приемных каналов срабатывали одновременно. Далее полученная информация о мгновенном распределении электромагнитного поля на раскрыве антенной решетки в виде отсчетов АЦП либо их частичных сумм сбрасывается в буферное запоминающее устройство. Последующее диаграммообразование осуществляется программным способом с помощью цифровых сигнальных процессоров (DSP) либо ПЛИС, выполняющих синфазное суммирование по требуемому закону напряжений всех сигналов для заданных угловых направлений.

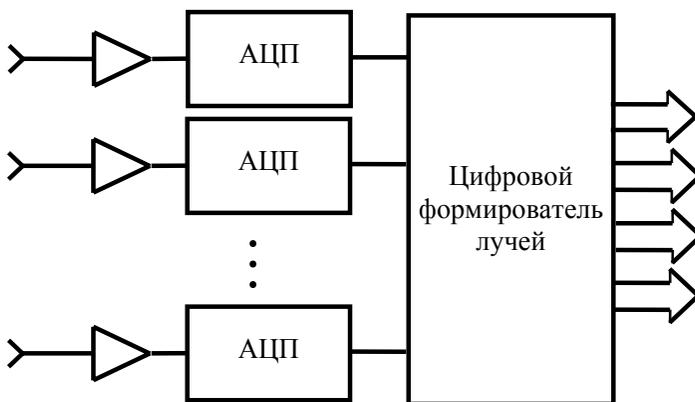


Рис. 4.1. РТС с приемной ЦАР

При цифровом формировании зондирующего луча картина изменяется на противоположную: синтезированный с помощью цифровой вычислительной системы (ЦВС) цифровой массив напряжений зондирующего сигнала, соответствующий требуемому распределению поля по раскрыву антенны, поступает на цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП), с выхода которых после усиления, фильтрации и переноса по частоте аналоговые сигналы подаются на возбуждение соответствующих излучателей (рис. 4.2).

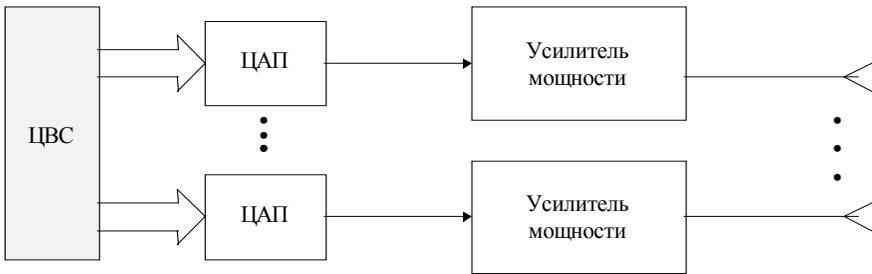


Рис. 4.2. Вариант построения передающего сегмента ЦАР

Опираясь на рассмотренные особенности построения приемной и передающей ЦАР, можно определить **приемо-передающую цифровую антенную решетку** как антенную систему, представляющую собой совокупность антенных элементов с аналого-цифровыми (цифро-аналоговыми) каналами, в которой формирование пространственно-селективной избирательности в режиме приема и синтез требуемого амплитудно-фазового распределения поля по апертуре антенны в режиме излучения выполняются в цифровом виде, без использования фазовращателей.

В радиолокации технология ЦАР позволяет выполнять функции обзора заданного участка пространства и определения координат объектов практически одновременно за счет пространственной многоканальности. Высокий уровень унификации технологии ЦАР, инвариантность к типу сигналов, переход к пространственной, временной и спектральной обработке сигналов в цифровом виде предоставляют существенные преимущества новому типу РЛС. За счет минимальных потерь информации такие РЛС обеспечивают высокую чувствительность к слабым сигналам и позволяют обнаруживать малоразмерные цели на больших дальностях в условиях интенсивных помех. Точность измерения угловых координат, дальности и скорости целей практически достигает потенциальных теоретических границ.

В зависимости от дальности действия, назначенного частотного диапазона РЛС с ЦАР отличаются лишь элементами СВЧ тракта и мощностью передатчиков, основная же аппаратура и алгоритмическое обеспечение, на которые возлагаются обнаружение и обработка сигналов, остается практически без изменений.

Рассмотренный принцип цифрового диаграммобразования является достаточно общим и в конкретных устройствах может претерпевать лишь те или иные вариации, обусловленные, главным образом, возможностями элементной базы, конкретным опытом разработчиков и их теоретической подготовкой.

Учитывая возможности высокой унификации аппаратных решений при создании РЛС с ЦАР, основной акцент в процессе синтеза и анализа соответствующих средств радиолокационного обеспечения функционирования систем вооружений смещается в область цифровой обработки сигналов. При этом существенно, что специфические возможности, предоставляемые технологией ЦАР, во многом могут быть достигнуты лишь на основе новых теоретических подходов к синтезу и анализу методов цифровой обработки сигналов, изложению которых посвящен последующий материал данного раздела.

## 4.2. Синтез средств обеспечения систем вооружения радиолокационной информацией

### *Семейство торцевых произведений матриц в моделях РЛС с факторизуемыми характеристиками направленности приемных каналов ЦАР*

При анализе и синтезе средств радиолокационного обеспечения функционирования систем вооружений, использующих технологию ЦАР, большое методологическое значение имеет способ, посредством которого та или иная модель сигнала формализуется на математическом языке. Среди всего многообразия возможных подходов к описанию сигнальных моделей с помощью математических символов явно выделяются два обособленных класса, различающихся математическим описанием: модели в развернутой форме записи и матричные. Первая классификационная группа достаточно эффективна в случае элементарных моделей сигналов и не может не привлекать своей доступностью для восприятия, удобством отслеживания промежуточных математических выкладок, высокой степенью алгоритмической готовности к программно-аппаратной реализации. В то же время при рассмотрении сложных моделей сигналов (составных, многоканальных, многопозиционных и т. п.) развернутый способ описания становится слишком громоздким для выкладок и уступает по своей компактности матричным формам представления: векторным, собственно матричным или тензорным. Поскольку вектор является частным случаем матриц, а тензоры валентности, большей 2, могут быть представлены в виде блочной матрицы, то весь этот класс для удобства и был назван матричным. Следует заметить, что в рамках последнего не исключается использование развернутых форм записи на начальном этапе матричной формализации и после завершения матричных преобразований для пе-

рехода к анализу физической сущности полученных результатов.

Как отмечалось в [45], в случае одно- и двухкоординатных РЛС модели сигналов в матричном виде достаточно просто могут быть сформированы на основе традиционных матричных операций. Например, для 1-координатной М-сигнальной пеленгационной задачи справедлива следующая аналитическая модель отклика ЦАР

$$U = QA, \quad (4.1)$$

где  $Q = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \dots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \dots & Q_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \dots & Q_R(x_M) \end{bmatrix}$  – R × M–матрица харак-

теристик направленности R приемных каналов ЦАР в направлениях M источников;  $A = [\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \dots \ \hat{a}_M]^T$  – вектор комплексных амплитуд M сигналов.

Представленная матричная запись (4.1) является основой для синтеза и анализа методов оценивания параметров сигналов, отраженных от радиолокационных целей, например, на основе метода максимального правдоподобия. В частности, задача измерения угловых координат целей в указанной 1-координатной РЛС может быть сведена к поиску оптимального решения системы уравнений (4.1), минимизирующего функционал невязки

$$L = (U - QA)^*(U - QA).$$

В случае 2-координатной РЛС для описания отклика ЦАР в рамках традиционной матричной алгебры приходится прибегать к искусственному приему "натяжения" вектора амплитуд на диагональ единичной матрицы. К примеру, при одноотсчетном варианте измерений угловых координат целей в двух плоскостях вместо (4.1) приходим к выражению

$$\begin{aligned}
 U &= Q \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{a}_M \end{bmatrix} \cdot F^T = \\
 &= \begin{bmatrix} Q_1(y_1) & \cdots & Q_1(y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_R(y_1) & \cdots & Q_R(y_M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{a}_M \end{bmatrix} \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} F_1(x_1) & \cdots & F_1(x_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ F_R(x_1) & \cdots & F_R(x_M) \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

В многоотсчетном случае необходимо использовать блочные матрицы характеристик направленности и применить иную матричную запись

$$U = \left[ \begin{array}{ccc|c|ccc}
 Q_1(y_1) & \cdots & Q_1(y_M) & & & & \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & & & \mathbf{0} \\
 Q_R(y_1) & \cdots & Q_R(y_M) & & & & \\
 \hline
 & \vdots & & \cdots & & & \vdots \\
 \hline
 & & \mathbf{0} & \cdots & Q_1(y_1) & \cdots & Q_1(y_M) \\
 & & & & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & & & Q_R(y_1) & \cdots & Q_R(y_M)
 \end{array} \right] \times$$



$$= \begin{bmatrix} F_1(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_1(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_1(x_M) \\ \hline F_R(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_R(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_R(x_M) \end{bmatrix} \quad - \text{ блок-матрица, полу-}$$

ченная размещением  $i$ -й строки исходной матрицы по главной диагонали  $i$ -го блока с обнулением всех внедиагональных его элементов.

При дальнейшем увеличении размерности сигнальной модели задача ее формализации в рамках классической матричной алгебры становится достаточно сложной. Так, при синтезе измерительной процедуры для трехкоординатной РЛС в одноотсчетном случае возможны два альтернативных варианта матричной записи отклика ЦАР:

$$U = (1_R \otimes S) \cdot \begin{bmatrix} \text{diag} [Q_1(y_1) \quad Q_1(y_2) \quad \cdots \quad Q_1(y_M)] \\ \text{diag} [Q_2(y_1) \quad Q_2(y_2) \quad \cdots \quad Q_2(y_M)] \\ \vdots \\ \text{diag} [Q_R(y_1) \quad Q_R(y_2) \quad \cdots \quad Q_R(y_M)] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{a}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{a}_M \end{bmatrix} \cdot F^T; \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
U = & (\mathbf{1}_R \otimes \mathbf{1}_R \otimes S) \times \\
& \times \left( \mathbf{1}_R \otimes \begin{bmatrix} \text{diag} [Q_1(y_1) \ Q_1(y_2) \ \cdots \ Q_1(y_M)] \\ \text{diag} [Q_2(y_1) \ Q_2(y_2) \ \cdots \ Q_2(y_M)] \\ \vdots \\ \text{diag} [Q_R(y_1) \ Q_R(y_2) \ \cdots \ Q_R(y_M)] \end{bmatrix} \right) \times \\
& \times \begin{bmatrix} \text{diag} [F_1(x_1) \ F_1(x_2) \ \cdots \ F_1(x_M)] \\ \text{diag} [F_2(x_1) \ F_2(x_2) \ \cdots \ F_2(x_M)] \\ \vdots \\ \text{diag} [F_R(x_1) \ F_R(x_2) \ \cdots \ F_R(x_M)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} \\ \dot{a}_{21} \\ \vdots \\ \dot{a}_{M1} \end{bmatrix}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Здесь матрица  $S$  содержит характеристики РЛС с ЦАР, зависящие от третьей координаты источников сигналов, например, дальности.

Аналогично, для четырехкоординатного варианта построения РЛС с ЦАР получим:

$$U = (\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_R \otimes V) (\mathbf{1}_R \otimes \text{diag}[S_i]) \text{diag}[Q_i] \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{a}_M \end{bmatrix} \cdot F^T; \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
U = & (\mathbf{1}_G \otimes \mathbf{1}_R \otimes \mathbf{1}_R \otimes V) (\mathbf{1}_R \otimes \mathbf{1}_R \otimes \text{diag} [S_i]) \times \\
& \times (\mathbf{1}_R \otimes \text{diag} [Q_i]) \cdot \text{diag} [F_i] \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} \\ \dot{a}_{21} \\ \vdots \\ \dot{a}_{M1} \end{bmatrix}, \quad (4.7)
\end{aligned}$$

где  $[diag [S_i]]$ ,  $[diag [Q_i]]$ ,  $[diag [F_i]]$  – блок–матрицы, полученные размещением  $i$ -й строки исходной матрицы по главной диагонали  $i$ -го блока с обнулением всех внедиагональных его элементов.

С учетом указанных сложностей использования традиционных матричных операций при синтезе и анализе методов оценивания нескольких координат целей в РЛС с ЦАР в [45, 46] было предложено развитие матричной теории антенных решеток на основе новых операций умножения матриц, образующих семейство торцевых произведений.

В силу важной роли, которая отводится разработанному матричному аппарату в вопросах описания аналитических моделей цифровых антенных решеток, остановимся на нем подробнее.

История математики, как известно, богата примерами, когда потребности технического прогресса навязывали естественному ходу развития математической мысли свои коррективы. В последнее время очередной такой период наступил и в теории матриц. На этот раз он затронул достаточно фундаментальные основы линейной алгебры, пополняя ее новыми операциями композиции матричных данных.

Анализ известных процедур матричного умножения позволил сделать вывод, что произведение Адамара и кронекеровское перемножение являются двумя крайними вариантами преобразования матричных данных, соответствующими элементарному и предельно общему уровням декомпозиции матриц как систем чисел. В первом случае производится поэлементное перемножение, а во втором – вся матрица целиком выступает в качестве множителя. Вместе с тем, вплоть до недавнего времени промежуточный уровень декомпозиции, состоящий в строчной либо столбцовой фрагментации матриц, участвующих в операции умножения, теорией матриц не предусматривался. Такое положение дел явилось сдерживающим фактором для развития многих технических приложений, в частности цифровой обработки сигналов, математической теории антенных решеток, что и побудило автора в начале

1993 года приступить к поиску новых средств комбинации матричных данных. Принять соответствующее решение было непросто, поскольку сказывалось традиционное убеждение в подчиненности статуса технических наук по отношению к математике. Однако укрепиться в правильности выбранного пути пришлось уже после того, как основные положения нового подхода были сформулированы и вынесены на всеобщее обозрение при подготовке к публикации статьи [45]. Проблемы цифровой обработки информации стирают грань между техническими и математическими науками, переплетая их настолько, что отнесение тех или иных результатов к конкретной научной области может быть весьма затруднительным и неизбежно носит субъективный характер.

Завершив на этом изложение предыстории вопроса, перейдем к детальному рассмотрению сути полученных результатов.

Согласно [45, 46], **торцевым произведением**  $r \times g$ -матрицы  $A = [a_{ij}]$  и  $r \times s$ -матрицы  $B$ , представленной как блок-матрица строк  $[B_i]$  ( $B = [B_i]$ ,  $i = 1, \dots, r$ ), будем называть  $r \times gs$ -матрицу  $A \square B$ , определяемую равенством

$$A \square B = [a_{ij} \cdot B_i]. \quad (4.8)$$

Пример 1.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$A \square B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{31} & a_{31}b_{32} & a_{31}b_{33} & a_{32}b_{31} & a_{32}b_{32} & a_{32}b_{33} \end{bmatrix}.$$

Если матрицу  $A$  рассматривать как совокупность вектор-столбцов, соответствующих начальным координатам нескольких точек, движущихся в декартовой системе отсчета, то с содержательной точки зрения произведение  $A \square B$  можно охарактеризовать как геометрическое преобразование, при котором одноименные координаты всех точек объекта  $A$  меняются тождественным образом.

Торцевое произведение представляет собой промежуточный уровень декомпозиции матриц, состоящий в их строчной фрагментации. Название "торцевое", как было указано в [45, 46], образно подчеркивает тот факт, что правая матрица перед умножением на элементы левой как бы расщепляется с "торца" по строкам.

В качестве практического примера использования торцевого произведения матриц можно указать аналитическую модель отклика многокоординатной РЛС на базе линейной цифровой антенной решетки, предложенную в [45]. Следуя рекомендациям этой работы, условимся, что ЦАР содержит  $R$  приемных каналов с характеристиками направленности  $Q_r(x)$ , где  $x$  – угловая координата источника излучения, причем по выходу каждого приемного канала синтезируется  $N$  доплеровских фильтров с амплитудно-частотными характеристиками  $F_n(\omega)$ , где  $\omega$  – радиальная частота. При воздействии на вход такой системы  $M$  источников сигналов, имеющих комплексные амплитуды  $\dot{a}_m$ , угловые координаты  $x_m$  и частоты  $\omega_m$ , свободное от шумов напряжение по выходу  $t$ -го частотного фильтра  $r$  – го приемного канала будет представлять собой сумму

$$\dot{U}_{tr} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m \cdot F_n(\omega_m) \cdot Q_r(x_m). \quad (4.9)$$

Если сформировать матрицу размера  $M \times R$  характеристик направленности приемных каналов  $Q_r(x_m)$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_2(x_1) & \cdots & Q_R(x_1) \\ Q_1(x_2) & Q_2(x_2) & \cdots & Q_R(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_1(x_M) & Q_2(x_M) & \cdots & Q_R(x_M) \end{bmatrix},$$

$M \times T$ -матрицу АЧХ доплеровских фильтров  $F_n(\omega_m)$

$$F = \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & F_2(\omega_1) & \cdots & F_N(\omega_1) \\ F_1(\omega_2) & F_2(\omega_2) & \cdots & F_N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_1(\omega_M) & F_2(\omega_M) & \cdots & F_N(\omega_M) \end{bmatrix}$$

и вектор комплексных амплитуд сигналов  $A = [\dot{a}_1 \ \dot{a}_2 \ \cdots \ \dot{a}_M]^T$ , то выражение (4.9) может быть записано в матричном виде с помощью торцевого произведения

$$U = Q^T (A \square F) = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \cdots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \cdots & Q_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \cdots & Q_R(x_M) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{a}_1 F_1(\omega_1) & \dot{a}_1 F_2(\omega_1) & \cdots & \dot{a}_1 F_N(\omega_1) \\ \dot{a}_2 F_1(\omega_2) & \dot{a}_2 F_2(\omega_2) & \cdots & \dot{a}_2 F_N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{a}_M F_1(\omega_M) & \dot{a}_M F_2(\omega_M) & \cdots & \dot{a}_M F_N(\omega_M) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

где  $U = \begin{bmatrix} \dot{U}_{11} & \dot{U}_{12} & \cdots & \dot{U}_{1R} \\ \dot{U}_{21} & \dot{U}_{22} & \cdots & \dot{U}_{2R} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{U}_{T1} & \dot{U}_{T2} & \cdots & \dot{U}_{TR} \end{bmatrix}$ , причем элементы матрицы

$\dot{U}_{nr}$  соответствуют (4.9).

Аналогичным образом формализуется отклик 3-координатной РЛС с плоской эквидистантной ЦАР

$$U = Q^T (A \square F \square V), \quad (4.11)$$

где  $V = \begin{bmatrix} V_1(y_1) & V_2(y_1) & \cdots & V_K(y_1) \\ V_1(y_2) & V_2(y_2) & \cdots & V_K(y_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ V_1(y_M) & V_2(y_M) & \cdots & V_K(y_M) \end{bmatrix}$  –  $M \times K$ –матрица харак-

теристик направленности  $V_k(y_m)$   $K$  приемных каналов в дополнительной координатной плоскости;

$U$  – блочная матрица вида

$$U = \begin{bmatrix} \dot{U}_{111} & \dot{U}_{121} & \cdots & \dot{U}_{1R1} & \cdots & \dot{U}_{11K} & \dot{U}_{12K} & \cdots & \dot{U}_{1RK} \\ \dot{U}_{211} & \dot{U}_{221} & \cdots & \dot{U}_{2R1} & \cdots & \dot{U}_{21K} & \dot{U}_{22K} & \cdots & \dot{U}_{2RK} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{U}_{N11} & \dot{U}_{N21} & \cdots & \dot{U}_{NR1} & \cdots & \dot{U}_{N1K} & \dot{U}_{N2K} & \cdots & \dot{U}_{NRK} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

с элементами

$$\dot{U}_{nrk} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m \cdot F_n(\omega_m) \cdot Q_r(x_m) \cdot V_k(y_m). \quad (4.13)$$

Дополнив пеленгационно-доплеровскую селекцию измерением дальности [45], на основании (4.11) запишем модель 4-координатной решетки

$$U = Q^T (A \square F \square V \square S), \quad (4.14)$$

где  $S = \begin{bmatrix} S_1(z_1) & S_2(z_1) & \cdots & S_G(z_1) \\ S_1(z_2) & S_2(z_2) & \cdots & S_G(z_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_1(z_M) & S_2(z_M) & \cdots & S_G(z_M) \end{bmatrix}$  –  $M \times G$ –матрица от-

кликов  $G$  стробов дальности  $S_g(z_m)$ , полученных в результате дополнительного стробирования отсчетов АЦП путем накопления со сбросом [47]. При этом, в отличие от (4.11), в блочной структуре матрицы (4.13) появляется периодичность, обусловленная наличием четвертого индекса.

Как уже отмечалось, для 2-координатного случая (4.10) существует альтернативная модель в рамках традиционной матричной алгебры, связанная с искусственным приемом "натяжения" вектора амплитуд сигналов  $A$  на главную диагональ единичной  $M \times M$ –матрицы. Соответствующий аналог (4.10) имеет вид [48]

$$U = Q^T \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{a}_M \end{bmatrix} \cdot S.$$

Однако при переходе к 3- и 4-координатным моделям известный набор матричных операций становится неэффективным.

Следуя принципу симметрии, определение (4.8) можно дать в виде  $A \square B = [A_i \cdot b_{ij}]$ . Поскольку в обоих случаях получаются понятия с одинаковыми свойствами, оба определения могли бы быть равно полезными в приложениях. Однако схема  $[a_{ij} \cdot B_i]$  остается предпочтительной как более близкая к прямому произведению [11].

Нововведение операции торцевого произведения в [45, 46] опередило инициативу профессора Барселонского университета математики Фортиани (Josep Fortiana Gregori), который независимо от [45, 46] с опозданием на пару лет в 1999 г. повторно предложил в [68] операцию торцевого матричного умножения, назвав ее полуадамаровым произведением (Semi-Hadamard Product). В сентябре 2001 г. в общении по электронной почте г-н Фортиана высоко оценил результаты [45, 46], признав их приоритетность. Однако, как выяснилось из [67], по прошествии 10 лет он вновь стал использовать термин “полуадамарово произведение”, что, впрочем, является делом вкуса. Время, прошедшее с публикаций [45, 46], подтвердило правильность выбранного пути, а рост количества приверженцев данного подхода среди зарубежных специалистов говорит о несостоятельности скептического отношения к этой проблематике, с которым поначалу пришлось столкнуться.

Симметричной альтернативой торцевому варианту умножения матриц является его транспонированная модификация, получившая в [45, 46] рабочее название “транспонированное торцевое произведение” и, как выяснилось впоследствии с помощью Интернет, известная в узком кругу зарубежных математиков по публикации [70] как произведение Хатри–Рао (Khatri–Rao Product). В соответствии с [45, 46], **произведением Хатри–Рао** (ПХР)  $g \times p$ -матрицы  $A = [a_{ij}]$  и  $s \times p$ -матрицы  $B$ , представленной как блоч-матрица столбцов  $[B_j]$  ( $B = [B_j]$ ,  $j = 1, \dots, p$ ), называется  $gs \times p$ -матрица  $A \blacksquare B$ , определяемая равенством

$$A \blacksquare B = [a_{ij} \cdot B_j]. \quad (4.15)$$

Пример 2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix},$$

$$A \blacksquare B = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} & a_{13} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} & a_{23} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при произведении Хатри–Рао двух матриц с одинаковым количеством столбцов каждый элемент левой матрицы умножается на соответствующий ему по номеру столбец правой.

Примечательно, что переход от произведения (4.8) к умножению (4.15) осуществляется в результате транспонирования матриц. При этом аналогично известному свойству для обобщенных кронекеровских произведений по строкам и столбцам имеют место тождества:

$$(A \square B)^T = A^T \blacksquare B^T; \quad (4.16)$$

$$(A \square B)^t = A^t \blacksquare B^t,$$

где символ “ $t$ ” означает операцию транспонирования матрицы относительно побочной диагонали. Например,

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{42} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Среди других свойств торцевых произведений матриц следует отметить, прежде всего, их сочетательные и распределительные относительно сложения свойства [45, 46], которые для матриц согласованной размерности имеют вид:

$$(A \square B) \square C = A \square (B \square C); (A \blacksquare B) \blacksquare C = A \blacksquare (B \blacksquare C); \quad (4.17)$$

$$(A + B) \square C = A \square C + B \square C; (A + B) \blacksquare C = A \blacksquare C + B \blacksquare C; \quad (4.18)$$

$$A \square (B + C) = A \square B + A \square C; A \blacksquare (B + C) = A \blacksquare B + A \blacksquare C; \quad (4.19)$$

$$(A + B) \square (C + D) = A \square C + B \square C + A \square D + B \square D; \quad (4.20)$$

$$(A + B) \blacksquare (C + D) = A \blacksquare C + B \blacksquare C + A \blacksquare D + B \blacksquare D. \quad (4.21)$$

Соблюдение необходимой размерности сомножителей является определяющим фактором и для обращения результата торцевого произведения. Операция  $(A \square B)^{-1}$  имеет смысл, если для  $p \times g$  – матрицы  $A$  и  $p \times s$ –матрицы  $B$  справедливо тождество  $p = s \times g$ . В противном случае возможно только обращение по Пенроузу.

Поскольку соотношения для ПХР легко получить транспонированием соответствующих выражений для торцевого произведения, то далее, имеет смысл ограничиться, по возможности, рассмотрением лишь свойств торцевого умножения, за исключением тех случаев, когда в записи присутствуют обе его разновидности.

Как и обычное произведение матриц, торцевое – некоммутативно [46]

$$(A \square B) \neq (B \square A), \quad (4.22)$$

хотя для векторов и произведений вектора на матрицу коммутативность допустима [46]:

$$a \square b = b \square a, \quad a \square B = B \square a. \quad (4.23)$$

Процедура торцевого произведения позволяет сократить количество вычислительных операций в распространенных задачах перемножения диагональной матрицы  $A = \text{diag}[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]$  и  $p \times g$ –матрицы  $B$

$$\begin{aligned} & \left( \text{diag}[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p] \right) \cdot B = \\ & = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_p \end{bmatrix} \cdot B = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]^T \square B. \quad (4.24) \end{aligned}$$

Согласно [46], в отличие от обычного произведения, для торцевого в данном случае в  $p$  раз сокращается количество умножений и вовсе отпадает необходимость в выполнении  $pg(p - 1)$  сложений.

В частном случае, когда  $a$  и  $b$  – векторы, имеют место легко проверяемые свойства [45, 46]:

$$a^T \square b^T = a^T \otimes b^T \quad (4.25)$$

( $a$  –  $p$ -вектор;  $b$  –  $g$ -вектор;  $\otimes$  – символ кронекеровского произведения);

$$a \square b = a \circ b \quad (4.26)$$

( $a$  и  $b$  суть  $p$ -векторы; "o" – символ произведения Адамара).

Рассмотрение взаимосвязи торцевых произведений с известными в теории матриц методами умножения наиболее интересно, когда в одном выражении присутствует несколько их разновидностей. При этом, согласно [45], во многих приложениях может быть полезно свойство, связывающее торцевое и прямое произведения квадратных матриц

$$A \otimes (B \square C) = (A \otimes B) \square C. \quad (4.27)$$

Характерно, что для произведения Адамара такая сочетательность невозможна

$$A \circ (B \square C) \neq (A \circ B) \square C, \quad (4.28)$$

хотя увязать торцевое произведение с адамаровым удастся в рамках другого тождества [45, 46]

$$(A \circ B) \square (C \circ D) = (A \square C) \circ (B \square D), \quad (4.29)$$

которое справедливо, если  $A$  и  $B$  – суть  $m \times n$ -матрицы, а  $C$  и  $D$  имеют размерность  $m \times r$ . Произведение Адамара в правой части (4.29) определено, поскольку его составляющие  $A \square C$  и  $B \square D$  представляют собой  $m \times nr$ -блок-матрицы.

С учетом коммутативного свойства поэлементного умножения, соотношение (4.29) при тех же размерностях матриц допускает перезапись в виде [46]

$$\begin{aligned} (A \circ B) \square (C \circ D) &= (A \square D) \circ (B \square C) = \\ &= (B \square D) \circ (A \square C) = (B \square C) \circ (A \square D). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Для  $m$ -вектора  $b$ ,  $g \times m$ -матрицы  $S$  и  $t \times m$ -матрицы  $F$  легко проверить справедливость формул замещения [46]:

$$(S \blacksquare F) b = \text{vec} [(b^T \blacksquare F) S^T], \quad (4.31)$$

$$(S \blacksquare F) b = \text{vec} [F (b \square S^T)], \quad (4.32)$$

где "vec" – оператор, представляющий  $g \times m$ -матрицу через  $gm$ -вектор-столбец [11].

Выражение (4.32) играет важную методологическую роль, являясь, по сути, формулой перехода от модели РЛС с ЦАР, основанной на торцевом произведении матриц, к модели, оперирующей произведением Хатри-Рао. Для того, чтобы обеспечить обратимость такой трансформации в известной теории матриц автору не удалось обнаружить приемлемой операции. Как оказалось, парадокс заключается в том, что введение в теорию матриц оператора векторизации матрицы "vec" в свое время не сопровождалось предложением симметричной ему альтернативы, позволяющей корректно осуществлять обратное преобразование вектора в матрицу.

Чтобы восполнить данный пробел, автором введен матричный оператор  $\text{invec}_M(\mathbf{a})$  ("инверсная векторизация"), действие которого состоит в том, что, начиная с нижнего элемента,  $MR$ -вектор  $\mathbf{a}$  разбивается на  $M$ -компонентные фрагменты, размещаемые далее последовательно в качестве  $R$  столбцов результирующей  $M \times R$ -матрицы в направлении от ее правого края к левому. При этом самый нижний фрагмент вектора становится крайним правым столбцом матрицы, а самый верхний – первым слева.

Пример 3.

$$A = \left[ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ \cdots \ a_{p-5} \ a_{p-4} \ a_{p-3} \ a_{p-2} \ a_{p-1} \ a_p \right]^T,$$

$$\text{invec}_3(A) = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & \cdots & a_{p-5} & a_{p-2} \\ a_2 & a_5 & \cdots & a_{p-4} & a_{p-1} \\ a_3 & a_6 & \cdots & a_{p-3} & a_p \end{bmatrix}.$$

С учетом введенной операции соотношения (4.31), (4.32) несложно переписать в эквивалентном виде:

$$\text{invec}_M [(S \blacksquare F) b] = (b^T \blacksquare F) S^T; \quad (4.33)$$

$$\text{invec}_M [(S \blacksquare F) b] = F (b \square S^T). \quad (4.34)$$

Следует отметить, что практическая значимость выражений (4.33) – (4.34) будет весомо продемонстрирована в последующем, например, при рассмотрении вопросов совместного оценивания дальности и других координат целей в РЛС с ЦАР.

Поскольку в рамках матричной записи возможно сочетание торцевого и Хатри-Рао произведений, крайне полезной, как показал опыт, может быть следующая теорема [46]:

**Теорема 1.** Если все матричные произведения определены, то торцевое произведение матриц и произведение Хатри–Рао удовлетворяют равенству

$$(A \square B) \cdot (C \blacksquare D) = (A \cdot C) \circ (B \cdot D). \quad (4.35)$$

Доказательство. Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  имеют соответственно размерности  $j \times k$ ,  $j \times z$ ,  $k \times p$  и  $z \times p$ . Поскольку матрица  $(A \square B)$  содержит  $k \times z$  столбцов, а матрица  $(C \blacksquare D)$  –  $k \times z$  строк, то матричное произведение  $(A \square B) \cdot (C \blacksquare D)$  определено. Оно состоит из  $j$  строк и  $p$  столбцов. Элемент, стоящий на пересечении  $j$ -й строки и  $p$ -го столбца, равен  $\sum_k \sum_z a_{jk} b_{jz} c_{kp} d_{zp}$ .

Так как матрицы  $A \cdot C$  и  $B \cdot D$  содержат по  $j$  строк и  $p$  столбцов, то произведение Адамара  $(A \cdot C) \circ (B \cdot D)$  также определено. Оно является  $j \times p$ -матрицей, причем стоящий на пересечении  $j$ -й строки и  $p$ -го столбца ее элемент равен

$$\sum_k a_{jk} c_{kp} \sum_z b_{jz} d_{zp} = \sum_k \sum_z a_{jk} b_{jz} c_{kp} d_{zp},$$

что и завершает доказательство.

Теорема 1 справедлива также для операции транспонирования относительно побочной диагонали (при условии согласования размерности матриц)

$$(A \blacksquare B)^t (C \blacksquare D) = (A^t \blacksquare B^t) \cdot (C \blacksquare D) = (A^t \cdot C) \circ (B^t \cdot D).$$

Аналогичным образом легко доказываются теоремы "поглощения" кронекеровских произведений торцевыми [46]:

**Теорема 2.** Для матриц  $A, B, C$  и  $D$ , имеющих соответственно размерности  $j \times k$  ( $j$ - количество строк,  $k$ - количество столбцов),  $m \times z$ ,  $k \times p$  и  $z \times p$ , справедливо равенство

$$(A \otimes B) \cdot (C \blacksquare D) = (A \cdot C) \blacksquare (B \cdot D). \quad (4.36)$$

**Теорема 3.** Для матриц  $A, B, C$  и  $D$  размерностью  $p \times k$ ,  $p \times z$ ,  $k \times j$  и  $z \times m$  соответственно, имеет место равенство

$$(A \square B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \square (B \cdot D). \quad (4.37)$$

Доказательство теоремы 3 можно построить также на основе транспонирования выражения (4.36). Действительно,

$$[(A \otimes B) \cdot (C \blacksquare D)]^T = (C \blacksquare D)^T \cdot (A \otimes B)^T = (C^T \square D^T) \cdot (A^T \otimes B^T).$$

С другой стороны, согласно (4.36) и (4.16)

$$[(A \otimes B) \cdot (C \blacksquare D)]^T = [(A \cdot C) \blacksquare (B \cdot D)]^T = (C^T \cdot A^T) \square (D^T \cdot B^T).$$

Таким образом,  $(C^T \square D^T) \cdot (A^T \otimes B^T) = (C^T \cdot A^T) \square (D^T \cdot B^T)$ .

Сделав замену обозначений, отсюда несложно прийти к (4.37), что и требовалось доказать. Следствием теорем 1–3 является свойство "поглощения" [46]

$$(A \square L) \cdot (B \otimes M) \cdot (C \otimes N) \cdot \dots \cdot (J \otimes S) \cdot (K \blacksquare T) = \\ = (A \cdot B \cdot C \cdot \dots \cdot J \cdot K) \circ (L \cdot M \cdot N \cdot \dots \cdot S \cdot T), \quad (4.38)$$

которое пока замыкает ряд наиболее важных свойств торцевого умножения.

Используя ПХР, можно предложить альтернативный вариант решения задачи аналитического моделирования отклика ЦАР. Вместо соотношений (4.10) – (4.14) для тех же матриц Q, V, F, S и вектора A получим:

$$U = (Q^T \blacksquare F^T) A = \\ = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \dots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \dots & Q_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \dots & Q_R(x_M) \end{array} \right] \blacksquare \\ \left[ \begin{array}{cccc} F_1(\omega_1) & F_1(\omega_2) & \dots & F_1(\omega_M) \\ F_2(\omega_1) & F_2(\omega_2) & \dots & F_2(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_N(\omega_1) & F_N(\omega_2) & \dots & F_N(\omega_M) \end{array} \right] \end{array} \right) \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_M \end{bmatrix}; \quad (4.39)$$

$$U = (Q^T \blacksquare V^T \blacksquare F^T) A = \\ = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \dots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \dots & Q_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \dots & Q_R(x_M) \end{array} \right] \blacksquare \\ \left[ \begin{array}{cccc} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \dots & V_1(y_M) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \dots & V_2(y_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ V_K(y_1) & V_K(y_2) & \dots & V_K(y_M) \end{array} \right] \blacksquare \\ \left[ \begin{array}{cccc} F_1(\omega_1) & F_1(\omega_2) & \dots & F_1(\omega_M) \\ F_2(\omega_1) & F_2(\omega_2) & \dots & F_2(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_N(\omega_1) & F_N(\omega_2) & \dots & F_N(\omega_M) \end{array} \right] \end{array} \right) \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_M \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & F_1(\omega_2) & \cdots & F_1(\omega_M) \\ F_2(\omega_1) & F_2(\omega_2) & \cdots & F_2(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_N(\omega_1) & F_N(\omega_2) & \cdots & F_N(\omega_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_M \end{bmatrix}; \quad (4.40)$$

$$U = (Q^T \blacksquare V^T \blacksquare F^T \blacksquare S^T) A =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \cdots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \cdots & Q_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \cdots & Q_R(x_M) \end{bmatrix} \blacksquare \begin{bmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \cdots & V_1(y_M) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \cdots & V_2(y_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ V_K(y_1) & V_K(y_2) & \cdots & V_K(y_M) \end{bmatrix} \blacksquare \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & F_1(\omega_2) & \cdots & F_1(\omega_M) \\ F_2(\omega_1) & F_2(\omega_2) & \cdots & F_2(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_N(\omega_1) & F_N(\omega_2) & \cdots & F_N(\omega_M) \end{bmatrix} \blacksquare \begin{bmatrix} S_1(z_1) & S_1(z_2) & \cdots & S_1(z_M) \\ S_2(z_1) & S_2(z_2) & \cdots & S_2(z_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_G(z_1) & S_G(z_2) & \cdots & S_G(z_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_M \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Если интересоваться преемственностью моделей (4.35) – (4.41) по отношению к ранее рассмотренным (4.10) – (4.14), то

таковую можно подтвердить, используя, например, свойство (4.34), в соответствии с которым

$$\text{invec}_{\mathbf{M}} [(Q^T \blacksquare F^T) A] = F^T (A \square Q); \quad (4.42)$$

$$\text{invec}_{\mathbf{M}} [(Q^T \blacksquare V^T \blacksquare F^T) A] = F^T (A \square Q \square V); \quad (4.43)$$

$$\text{invec}_{\mathbf{M}} [(Q^T \blacksquare V^T \blacksquare F^T \blacksquare S^T) A] = S^T (A \square Q \square V \square F). \quad (4.44)$$

В данном случае модели, основанные на торцевых произведениях (правая часть равенств), совпали с упомянутыми (4.10) – (4.14) с точностью до порядка следования матриц, являющегося всецело вопросом договоренности.

Между тем, по сравнению с (4.10) – (4.14) удобство использования ПХР для обработки сигналов и анализа точности многокоординатных систем состоит в возможности привлечения результатов, полученных в рамках традиционного набора действий над матрицами, применительно к 1- или 2-координатным РЛС. Например, используя 1-координатные выкладки [47] и обозначив  $P = Q^T \blacksquare V^T \blacksquare F^T \blacksquare S^T$ , несложно записать компактную информационную матрицу Фишера для характеристики предельно достижимой точности модели (4.44) в случае одного источника

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[ \frac{P^T \cdot P}{(\partial P / \partial Y)^T \cdot (\dot{a} \cdot P)} \quad \Bigg| \quad \frac{(a^* \cdot P^T) \cdot \partial P / \partial Y}{(\partial P / \partial Y)^T \cdot (\dot{a} a^* \cdot I_{\text{RKNG}}) \cdot \partial P / \partial Y} \right]. \quad (4.45)$$

Здесь  $\partial P / \partial Y$  – производная Нойдеккера от матрицы  $P$  по вектору  $Y$ , составленному из неизвестных параметров сигнала;  $\dot{a}$  – комплексная амплитуда;  $I_{\text{RKNG}}$  – единичная матрица размерности  $R \times K \times N \times G$  (детально методика формирования информационной матрицы Фишера, в том числе для  $M$  источников, будет изложена позже).

Руководствуясь теоремой 2, можно получить также компактные представления откликов ЦАР в задачах измерения дальности

сти, связанных с учетом взаимного влияния приемных каналов. Аналитическая модель двухкоординатной ЦАР при инвариантности коэффициентов взаимного влияния к направлениям прихода сигналов допускает представление в виде

$$U = (H \otimes W)(Q \blacksquare V) \cdot A, \quad (4.46)$$

где  $U$  – блок–вектор выходных напряжений первичных каналов ЦАР;  $Q, V$  –  $R \times M$ –матрицы характеристик направленности первичных каналов в азимутальной и угломестной плоскостях;

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \cdots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \cdots & Q_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \cdots & Q_R(x_M) \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \cdots & V_1(y_M) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \cdots & V_2(y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_R(y_1) & V_R(y_2) & \cdots & V_R(y_M) \end{bmatrix};$$

$$Q \blacksquare V =$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) \begin{bmatrix} V_1(y_1) \\ \vdots \\ V_R(y_1) \end{bmatrix} & Q_1(x_2) \begin{bmatrix} V_1(y_2) \\ \vdots \\ V_R(y_2) \end{bmatrix} & \cdots & Q_1(x_M) \begin{bmatrix} V_1(y_M) \\ \vdots \\ V_R(y_M) \end{bmatrix} \\ Q_2(x_1) \begin{bmatrix} V_1(y_1) \\ \vdots \\ V_R(y_1) \end{bmatrix} & Q_2(x_2) \begin{bmatrix} V_1(y_2) \\ \vdots \\ V_R(y_2) \end{bmatrix} & \cdots & Q_2(x_M) \begin{bmatrix} V_1(y_M) \\ \vdots \\ V_R(y_M) \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) \begin{bmatrix} V_1(y_1) \\ \vdots \\ V_R(y_1) \end{bmatrix} & Q_R(x_2) \begin{bmatrix} V_1(y_2) \\ \vdots \\ V_R(y_2) \end{bmatrix} & \cdots & Q_R(x_M) \begin{bmatrix} V_1(y_M) \\ \vdots \\ V_R(y_M) \end{bmatrix} \end{bmatrix};$$

$H, W - R \times R$  – матрицы коэффициентов взаимного влияния, причем

$$H = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & \cdots & H_{1R} \\ H_{21} & 1 & \cdots & H_{2R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{R1} & H_{R2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 1 & W_{12} & \cdots & W_{1R} \\ W_{21} & 1 & \cdots & W_{2R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{R1} & W_{R2} & \cdots & 1 \end{bmatrix};$$

$$|H_{nm}| < 1; \quad |W_{nm}| < 1;$$

$A = [\dot{a}_1 \ \dot{a}_2 \ \cdots \ \dot{a}_M]^T$  – вектор комплексных амплитуд сигналов  $M$  источников.

В соответствии с теоремой 2 можно далее записать

$$(H \otimes W)(Q \blacksquare V) = (H \cdot Q) \blacksquare (W \cdot V). \quad (4.47)$$

Откуда, по-прежнему

$$U = P \cdot A, \quad (4.48)$$

где  $P = (H \cdot Q) \blacksquare (W \cdot V) = Q_\Sigma \blacksquare V_\Sigma$ , причем  $Q_\Sigma, V_\Sigma$  – матрицы результирующих характеристик направленности, учитывающих эффект взаимного влияния в оговоренных рамках его проявления.

При статистическом анализе набора однотипных подсистем, образующих сложную систему, примером которой может быть многопозиционная радиолокационная сеть из нескольких приемных станций, приходится иметь дело с блочными матрицами. Согласно [45], к ним также применимы правила (4.16) – (4.38), однако в ряде случаев возникает необходимость в специальных блочных модификациях торцевых произведений, начало рассмотрению которых положено в [45].

Одним из них является блочное торцевое произведение (БТП), которое, согласно [45, 46], может быть определено следующим образом.

**Определение.** Блочным торцевым произведением  $\text{br} \times \text{cs}$ -матрицы  $A = [A_{ij}]$  и  $\text{br} \times \text{cg}$ -матрицы  $B = [B_{ij}]$  ( $i=1, \dots, b; j=1, \dots, c$ ) с согласованным разбиением на блоки размером  $\text{p} \times \text{s}$  и  $\text{p} \times \text{g}$  соответственно называется матрица  $A \odot B$ , определяемая равенством

$$A \odot B = [A_{ij} \square B_{ij}]. \quad (4.49)$$

Знак БТП " $\odot$ " символизирует то обстоятельство, что одноименные блоки матриц берутся для выполнения торцевого умножения (" $\square$ ") по принципу произведения Адамара (символ " $\circ$ "). В [46] для БТП пришлось использовать иное обозначение, чтобы упростить процесс верстки статьи.

Пример 4.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1111} & p_{1211} & p_{1112} & p_{1212} \\ p_{2111} & p_{2211} & p_{2112} & p_{2212} \\ p_{3111} & p_{3211} & p_{3112} & p_{3212} \\ p_{1121} & p_{1221} & p_{1122} & p_{1222} \\ p_{2121} & p_{2221} & p_{2122} & p_{2222} \\ p_{3121} & p_{3221} & p_{3122} & p_{3222} \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1111} & t_{1211} & t_{1311} & t_{1112} & t_{1212} & t_{1312} \\ t_{2111} & t_{2211} & t_{2311} & t_{2112} & t_{2212} & t_{2312} \\ t_{3111} & t_{3211} & t_{3311} & t_{3112} & t_{3212} & t_{3312} \\ t_{1121} & t_{1221} & t_{1321} & t_{1122} & t_{1222} & t_{1322} \\ t_{2121} & t_{2221} & t_{2321} & t_{2122} & t_{2222} & t_{2322} \\ t_{3121} & t_{3221} & t_{3321} & t_{3122} & t_{3222} & t_{3322} \end{bmatrix},$$

$$P \odot T = \begin{bmatrix} P_{11} \square T_{11} & P_{12} \square T_{12} \\ P_{21} \square T_{21} & P_{22} \square T_{22} \end{bmatrix}.$$

Согласно [46], каждый блок матрицы  $P$  можно трактовать как совокупность вектор-столбцов, описывающих параметры состояния подсистем объекта в одной из независимо изменяющихся систем отсчета. При этом всей матрице  $P$  в рассмотренном примере можно поставить в соответствие некую 3-параметрическую двухкомпонентную систему, функционирующую одновременно в двух разных отсчетных базисах, причем каждая компонента системы состоит из двух подсистем. Для блока  $P_{nm}$  индекс  $n$  соответствует номеру базиса,  $m$  – номеру системных компонент, в элементах же  $p_{klm}$  индексы  $k$  и  $l$  дополнительно означают номер параметра и номер подсистемы.

С помощью блочного торцевого произведения  $P \oplus T$  становится возможным формализовать динамику эволюции такой сложной системы в последовательных моментах времени (в данном примере трех) при преобразовании систем отсчета, тождественным образом изменяющем в каждом из базисов одноименные параметры подсистем, входящих в системные компоненты. Существенно, что законы трансформации параметров предполагаются базисно-зависимыми и переменными во времени.

Введение отдельной модификации торцевого произведения вместо наложения ограничений на его свойства сохраняет возможность торцевого перемножения блок–матриц, например, с несогласованным разбиением на блоки, но с одинаковым количеством строк (для торцевого произведения) или столбцов (для ПХР). При этом вместо БТП для технического объекта  $P$ , аналогичного рассмотренному в предыдущем примере, но отличающегося от него наличием лишь одноотсчетного базиса, может быть задано моноблочное преобразование  $T$ , одинаковым образом изменяющее параметры состояния подсистем системных компонент  $P$ . Его результат, соответственно, запишется по правилу (4.16)

$$P = [P_1 | P_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} p_{111} & p_{121} & p_{112} & p_{122} \\ p_{211} & p_{221} & p_{212} & p_{222} \\ p_{311} & p_{321} & p_{312} & p_{322} \end{array} \right], T = \left[ \begin{array}{ccc} t_{111} & t_{121} & t_{131} \\ t_{211} & t_{221} & t_{231} \\ t_{311} & t_{321} & t_{331} \end{array} \right],$$

$$P \square T = [P_1 \square T \mid P_2 \square T] . \quad (4.50)$$

Все сказанное в равной мере относится и к транспонированному БТП [45, 46].

**Определение.** Транспонированным блочным торцевым произведением (ТБТП) или **блочным произведением Хатри-Рао** (БПХР)  $cs \times br$ -матрицы  $A = [A_{ij}]$  и  $cg \times br$ -матрицы  $B = [B_{ij}]$  ( $i=1, \dots, c$ ;  $j=1, \dots, b$ ) с согласованным разбиением на блоки размером  $s \times r$  и  $g \times r$  соответственно называется матрица  $A \odot B$ , определяемая равенством

$$A \odot B = [A_{ij} \blacksquare B_{ij}] . \quad (4.51)$$

Пример 5.

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \odot \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} \blacksquare B_{11} & A_{12} \blacksquare B_{12} \\ \hline A_{21} \blacksquare B_{21} & A_{22} \blacksquare B_{22} \end{array} \right] ,$$

в частности, если

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11ij} & a_{12ij} & a_{13ij} \\ a_{21ij} & a_{22ij} & a_{23ij} \end{bmatrix}; \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{11ij} & b_{12ij} & b_{13ij} \\ b_{21ij} & b_{22ij} & b_{23ij} \end{bmatrix};$$

$$i=1, 2; j=1, 2;$$

$$\text{то } A_{ij} \blacksquare B_{ij} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} a_{11ij} & b_{11ij} \\ a_{21ij} & b_{21ij} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12ij} & b_{12ij} \\ a_{22ij} & b_{22ij} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{13ij} & b_{13ij} \\ a_{23ij} & b_{23ij} \end{bmatrix} \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array} \right] .$$

В [46] отмечалось, что в отношении блочных типов произведений справедливы многие свойства, присущие торцевому умножению и его транспонированному варианту ПХР, поэтому их детальное обсуждение здесь не представляется столь важным.

Следует указать лишь наиболее интересные из них, которые непосредственно либо в частном виде будут интенсивно задействованы в последующем (полагается, что размерности матриц согласованы):

$$[A \ominus B]^T = A^T \ominus B^T; \quad (4.52)$$

$$([A_{ji}] \ominus [B_{ji}])([K_{ik}] \ominus [M_{ik}]) = [P_{jk} = \sum_i \{(A_{ji} \cdot K_{ik}) \circ (B_{ji} \cdot M_{ik})\}]; \quad (4.53)$$

$$([A_{ji}] \ominus [B_{ji}]) \cdot [K_{ik} \otimes M_{ik}] = [P_{jk} = \sum_i \{(A_{ji} \cdot K_{ik}) \square (B_{ji} \cdot M_{ik})\}]; \quad (4.54)$$

$$[A_{ji} \otimes B_{ji}] \cdot ([K_{ik}] \ominus [M_{ik}]) = [P_{jk} = \sum_i \{(A_{ji} \cdot K_{ik}) \blacksquare (B_{ji} \cdot M_{ik})\}].$$

Переходя к предельно сложной задаче, на основе нововведенных типов произведений матриц можно формализовать отклики многопозиционной радиолокационной системы из  $W$  конформных 4-координатных ЦАР, содержащих по  $G$  секций каждая. Различия между секциями и позициями РЛС в характеристиках направленности, АЧХ фильтров и откликах стробов дальности выразим, заменив матрицы  $Q^T$ ,  $V^T$ ,  $F^T$  и  $S^T$  блочными структурами, в которых  $T \times W$  блоков, соответствующих разным секциям и межпозиционным различиям параметров, разместим по-вертикали. При этом, например, вместо матрицы характеристик  $Q$  в (4.39) – (4.41) получим блок-матрицу  $Q_{TW}^T = [\tilde{Q}_{11} \mid \tilde{Q}_{21} \mid \cdots \mid \tilde{Q}_{G1} \mid \cdots \mid \tilde{Q}_{TW}]^T$ ,

$$\tilde{Q}_{tw} = \begin{bmatrix} Q_{1tw}(x_1) & Q_{2tw}(x_1) & \cdots & Q_{Rtw}(x_1) \\ Q_{1tw}(x_2) & Q_{2tw}(x_2) & \cdots & Q_{Rtw}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{1tw}(x_M) & Q_{2tw}(x_M) & \cdots & Q_{Rtw}(x_M) \end{bmatrix}.$$

Аналогичное, согласованное с  $Q_{TW}^T$ , разбиение на блоки приобретут и блок-матрицы  $F_{TW}^T$ ,  $V_{TW}^T$ ,  $S_{TW}^T$ . Дальнейшие выкладки

требуют использования понятия транспонированного БТП. Формализуем на его основе отклик многопозиционной радиолокационной системы

$$U = (Q_{TW}^T \circledast F_{TW}^T \circledast V_{TW}^T \circledast S_{TW}^T) \cdot A. \quad (4.55)$$

В рассмотренном случае транспонированное БТП позволило осуществить формирование 4-координатного отклика ЦАР для каждой из  $T$  секций  $W$  позиций РЛС. Добавляя в блочных матрицах  $Q_{TW}^T$ ,  $F_{TW}^T$ ,  $V_{TW}^T$  и  $S_{TW}^T$  третий индекс, сообразно номеру среды местонахождения многопозиционной системы, можно обобщить приведенную аналитическую модель на случай региональной системы радиолокационной разведки (РСРР). При этом обобщенная модель указанной РСРР может быть представлена в виде

$$U = (Q \circledast V \circledast F \circledast S) \cdot A, \quad (4.56)$$

где  $Q = [\tilde{Q}_{111} \mid \tilde{Q}_{211} \mid \dots \mid \tilde{Q}_{T11} \mid \dots \mid \tilde{Q}_{TW1} \mid \dots \mid \tilde{Q}_{TWP}]^T$  - блочная матрица характеристик направленности антенных элементов в азимутальной плоскости, блоки которой

$$\tilde{Q}_{twp} = \begin{bmatrix} Q_{1twp}(x_1) & Q_{2twp}(x_1) & \dots & Q_{Rtwp}(x_1) \\ Q_{1twp}(x_2) & Q_{2twp}(x_2) & \dots & Q_{Rtwp}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_{1twp}(x_M) & Q_{2twp}(x_M) & \dots & Q_{Rtwp}(x_M) \end{bmatrix}$$

(с учетом последующего выполнения транспонирования), их элементы  $Q_{rtwp}(x_m)$  являются характеристиками направленности  $r$ -го приемного канала по азимуту для  $t$ -й секции ЦАР  $w$ -й позиции многопозиционной РЛС  $p$ -го региона в направлении источника излучения с соответствующей угловой координатой  $x_m$ , по аналогии,

логии,  $V = [\tilde{V}_{111} \mid \tilde{V}_{211} \mid \dots \mid \tilde{V}_{T11} \mid \dots \mid \tilde{V}_{TW1} \mid \dots \mid \tilde{V}_{TWP}]^T$  - блок-

матрица характеристик направленности  $K$  антенных элементов по углу места, в которой

$$\tilde{V}_{\text{twp}} = \begin{bmatrix} V_{1\text{twp}}(y_1) & V_{2\text{twp}}(y_1) & \cdots & V_{K\text{twp}}(y_1) \\ V_{1\text{twp}}(y_2) & V_{2\text{twp}}(y_2) & \cdots & V_{K\text{twp}}(y_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ V_{1\text{twp}}(y_M) & V_{2\text{twp}}(y_M) & \cdots & V_{K\text{twp}}(y_M) \end{bmatrix},$$

$F = [\tilde{F}_{111} \mid \tilde{F}_{211} \mid \cdots \mid \tilde{F}_{T11} \mid \cdots \mid \tilde{F}_{T\text{W}1} \mid \cdots \mid \tilde{F}_{T\text{WP}}]^T$  – блочная матрица АЧХ синтезированных частотных фильтров, где

$$\tilde{F}_{\text{twp}} = \begin{bmatrix} F_{1\text{twp}}(\omega_1) & F_{2\text{twp}}(\omega_1) & \cdots & F_{N\text{twp}}(\omega_1) \\ F_{1\text{twp}}(\omega_2) & F_{2\text{twp}}(\omega_2) & \cdots & F_{N\text{twp}}(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{1\text{twp}}(\omega_M) & F_{2\text{twp}}(\omega_M) & \cdots & F_{N\text{twp}}(\omega_M) \end{bmatrix},$$

причем  $F_{n\text{twp}}(\omega_m)$  – амплитудно-частотная характеристика  $n$ -го частотного фильтра для доплеровской частоты  $m$ -го сигнала  $\omega_m$ , другие индексы имеют то же значение,

наконец,  $S = [\tilde{S}_{111} \mid \tilde{S}_{211} \mid \cdots \mid \tilde{S}_{T11} \mid \cdots \mid \tilde{S}_{T\text{W}1} \mid \cdots \mid \tilde{S}_{T\text{WP}}]^T$ ,

$$\tilde{S}_{\text{gwp}} = \begin{bmatrix} S_{1\text{twp}}(z_1) & S_{2\text{twp}}(z_1) & \cdots & S_{G\text{twp}}(z_1) \\ S_{1\text{twp}}(z_2) & S_{2\text{twp}}(z_2) & \cdots & S_{G\text{twp}}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{1\text{twp}}(z_M) & S_{2\text{twp}}(z_M) & \cdots & S_{G\text{twp}}(z_M) \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы  $S_{g\text{twp}}(z_m)$  являются сигнальными характеристиками  $g$ -го строба дальности, полученными путем дополнительного накопления отсчетов АЦП в соответствии с методами [47];  $A = [\dot{a}_1 \ \dot{a}_2 \ \cdots \ \dot{a}_M]^T$  – вектор комплексных амплитуд сигнала

лов;  $U = [\tilde{U}_{111} \mid \tilde{U}_{211} \mid \dots \mid \tilde{U}_{T11} \mid \dots \mid \tilde{U}_{TW1} \mid \dots \mid \tilde{U}_{TWP}]^T$  – блок–вектор массивов исходных напряжений приемных каналов многопозиционных РЛС с ЦАР, каждый из его блоков может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_{twp} = \\ & = [\dot{U}_{111,twp} \quad \dot{U}_{211,twp} \cdots \dot{U}_{R11,twp} \cdots \dot{U}_{RK11,twp} \cdots \dot{U}_{RKN1,twp} \cdots \dot{U}_{RKNG,twp}]^T, \end{aligned}$$

где

$$\dot{U}_{rkng,twp} = \sum_{m=1}^M Q_{r,twp}(x_m) \cdot V_{k,twp}(y_m) \cdot F_{n,twp}(\omega_m) \cdot S_{g,twp}(z_m) \cdot \dot{a}_m + \dot{n}_{rtnn,nmk},$$

$\dot{n}_{rkng,twp}$  – внутренний шум  $rk$ -го приемного канала ЦАР, который принадлежит ее  $t$ -й секции в  $w$ -й позиции  $r$ -го региона соответственно, по выходу  $n$ -го частотного фильтра в  $g$ -м стробе дальности.

Приведенная модель РСРР соответствует однопачечной обработке сигналов. Если же есть возможность обработки нескольких пачек импульсов, то пренебрежение изменениями амплитуд во времени будет чересчур грубым допущением. В этом случае уместно перейти от вектора амплитуд к соответствующей матрице с преобразованием блок–вектора напряжений  $U$  в блок–матрицу, количество столбцов которой определялось бы количеством сигнальных пачек  $Z$ :

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{1111} & \tilde{U}_{2111} & \cdots & \tilde{U}_{T111} & \cdots & \tilde{U}_{TW11} & \cdots & \tilde{U}_{TWP1} \\ \tilde{U}_{1112} & \tilde{U}_{2112} & \cdots & \tilde{U}_{T112} & \cdots & \tilde{U}_{TW12} & \cdots & \tilde{U}_{TWP2} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{U}_{111Z} & \tilde{U}_{211Z} & \cdots & \tilde{U}_{T11Z} & \cdots & \tilde{U}_{TW1Z} & \cdots & \tilde{U}_{TWPZ} \end{bmatrix}^T.$$

Следует отметить возможность сочетания в рамках одной записи как торцевого, так и произведения Хатри–Рао с их блочны-

ми модификациями. Такой прием позволяет компактно упаковать результат умножения в многоблочную структуру, в отличие от векторного представления массивов напряжений, полученного в (4.39) – (4.41).

Введенные операции блочных произведений матриц довольно органично сочетаются с их исходными прототипами – торцевым матричным произведением и произведением Хатри–Рао. Существенно, что блочные разновидности процедуры торцевого умножения естественным образом порождаются операцией нойдеккеровского дифференцирования ПХР, и в этом смысле их появление вполне закономерно. Иллюстрируя сказанное, обратимся к простейшим выкладкам по факторизации нойдеккеровского дифференцирования 2-компонентного произведения Хатри–Рао

$$P = F \blacksquare Q, \quad (4.57)$$

где  $F$  –  $N \times M$ –матрица,  $Q$  –  $R \times M$ –матрица.

По аналогии с [47], матрицу  $F$  можно трактовать как  $N \times M$ –матрицу откликов  $N$  синтезированных частотных фильтров на частотах  $M$  сигналов, а  $Q$  – как  $R \times M$ –матрицу значений характеристик направленности  $R$  приемных каналов ЦАР в направлениях  $M$  источников. При этом в отсутствие шумов набор напряжений откликов приемных каналов ЦАР может быть записан в виде  $U = P \cdot A$ , где  $A$  – вектор комплексных амплитуд сигналов. При воздействии двух источников сигналов

$$P = F \blacksquare Q = \left[ \begin{array}{c|c} F_1(\omega_1) \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_1) \\ \vdots \\ Q_R(x_1) \end{bmatrix} & F_1(\omega_2) \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_2) \\ \vdots \\ Q_R(x_2) \end{bmatrix} \\ \hline \vdots & \vdots \\ F_N(\omega_1) \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_1) \\ \vdots \\ Q_R(x_1) \end{bmatrix} & F_N(\omega_2) \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_2) \\ \vdots \\ Q_R(x_2) \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (4.58)$$

с учетом

$$F = \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & F_1(\omega_2) \\ F_2(\omega_1) & F_2(\omega_2) \\ \vdots & \vdots \\ F_N(\omega_1) & F_N(\omega_2) \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим в качестве вектора неизвестных  $Y = [x_1 \ x_2 \ \omega_1 \ \omega_2]^T$ . Тогда производная Нойдеккера от P примет вид [50]

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial(F \cdot Q)}{\partial Y} = \quad (4.59)$$

$$= \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1(x_1)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_R(x_1)}{\partial x_1} \end{bmatrix} & 0 & \frac{\partial F_1(\omega_1)}{\partial \omega_1} \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_1) \\ \vdots \\ Q_R(x_1) \end{bmatrix} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_N(\omega_1) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1(x_1)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_R(x_1)}{\partial x_1} \end{bmatrix} & 0 & \frac{\partial F_N(\omega_1)}{\partial \omega_1} \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_1) \\ \vdots \\ Q_R(x_1) \end{bmatrix} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & F_1(\omega_2) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1(x_2)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_R(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} & 0 & \frac{\partial F_1(\omega_2)}{\partial \omega_2} \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_2) \\ \vdots \\ Q_R(x_2) \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & F_N(\omega_2) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1(x_2)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_R(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} & 0 & \frac{\partial F_N(\omega_2)}{\partial \omega_2} \cdot \begin{bmatrix} Q_1(x_2) \\ \vdots \\ Q_R(x_2) \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix}.$$

К идее о возможности факторизации  $\frac{\partial P}{\partial Y}$  согласно [50] несложно придти, анализируя выражение (4.59). Действительно, при вни-

материльном рассмотрении обнаруживается, что (4.59) может быть получено как результат транспонированного блочного торцевого произведения двух матриц  $\partial F_y$  и  $\partial Q_y$ , имеющих вид [50]

$$\partial F_y = \left[ \begin{array}{cc|cc} F_1(\omega_1) & 0 & \frac{\partial F_1(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_N(\omega_1) & 0 & \frac{\partial F_N(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 \\ \hline 0 & F_1(\omega_2) & 0 & \frac{\partial F_1(\omega_2)}{\partial \omega_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & F_N(\omega_2) & 0 & \frac{\partial F_N(\omega_2)}{\partial \omega_2} \end{array} \right],$$

$$\partial Q_y = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{\partial Q_1(x_1)}{\partial x_1} & 0 & Q_1(x_1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_R(x_1)}{\partial x_1} & 0 & Q_R(x_1) & 0 \\ \hline 0 & \frac{\partial Q_1(x_2)}{\partial x_2} & 0 & Q_1(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial Q_R(x_2)}{\partial x_2} & 0 & Q_R(x_2) \end{array} \right]. \quad (4.60)$$

Обозначив

$$\partial F_y = \left[ \begin{array}{c|c} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} \\ \hline F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} \end{array} \right] \text{ и } \partial Q_y = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & Q_1 \\ \hline \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} & Q_2 \end{array} \right], \quad (4.61)$$

где

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ F_N(\omega_1) & 0 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 0 & F_1(\omega_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & F_N(\omega_2) \end{bmatrix}; \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial F_1(\omega_2)}{\partial \omega_2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial F_N(\omega_2)}{\partial \omega_2} \end{bmatrix}; \quad (4.63)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & 0 \end{bmatrix}; Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & Q_1(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & Q_R(x_2) \end{bmatrix}; \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1(x_1)}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_R(x_1)}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial Q_1(x_2)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial Q_R(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

согласно определению транспонированного БТП (4.51) получим [50]

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \partial F_y \circledast \partial Q_y = \left[ \begin{array}{c|c} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} \\ \hline F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} \end{array} \right] \circledast$$

$$\circledast \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & Q_1 \\ \hline \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} & Q_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} F_1 \blacksquare \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} \blacksquare Q_1 \\ \hline F_2 \blacksquare \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} \blacksquare Q_2 \end{array} \right]. \quad (4.66)$$

Существенно, что факторизации поддается не только результат дифференцирования по Нойдеккеру, но и произведение  $\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot \frac{\partial P}{\partial Y}$ . Так, для соотношения (4.59) несложно получить [50]

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = [P_1 \mid P_2], \quad (4.67)$$

где

$$P_1 = \left[ \begin{array}{cc} \sum_{n=1}^N F_n^2(\omega_1) \left\{ \sum_{r=1}^R \left( \frac{\partial Q_r(x_1)}{\partial x_1} \right)^2 \right\} & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^N F_n^2(\omega_2) \left\{ \sum_{r=1}^R \left( \frac{\partial Q_r(x_2)}{\partial x_2} \right)^2 \right\} \\ \left\{ \sum_{n=1}^N F_n(\omega_1) \frac{\partial F_n(\omega_1)}{\partial \omega_1} \right\} \sum_{r=1}^R Q_r(x_1) \frac{\partial Q_r(x_1)}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \left\{ \sum_{n=1}^N F_n(\omega_2) \frac{\partial F_n(\omega_2)}{\partial \omega_2} \right\} \sum_{r=1}^R Q_r(x_2) \frac{\partial Q_r(x_2)}{\partial x_2} \end{array} \right];$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \left\{ \sum_{n=1}^N F_n(\omega_1) \frac{\partial F_n(\omega_1)}{\partial \omega_1} \right\} \sum_{r=1}^R Q_r(x_1) \frac{\partial Q_r(x_1)}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \left\{ \sum_{n=1}^N F_n(\omega_2) \frac{\partial F_n(\omega_2)}{\partial \omega_2} \right\} \sum_{r=1}^R Q_r(x_2) \frac{\partial Q_r(x_2)}{\partial x_2} \\ \left\{ \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial F_n(\omega_1)}{\partial \omega_1} \right)^2 \right\} \left\{ \sum_{r=1}^R Q_r^2(x_1) \right\} & 0 \\ 0 & \left\{ \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial F_n(\omega_2)}{\partial \omega_2} \right)^2 \right\} \left\{ \sum_{r=1}^R Q_r^2(x_2) \right\} \end{bmatrix}.$$

Не составляет труда заметить очевидное тождество

$$\left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = Z \circ V, \quad (4.68)$$

в котором

$$Z = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N F_n^2(\omega_1) & 0 & \sum_{n=1}^N F_n(\omega_1) \cdot \frac{\partial F_n(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^N F_n^2(\omega_2) & 0 & \sum_{n=1}^N F_n(\omega_2) \cdot \frac{\partial F_n(\omega_2)}{\partial \omega_2} \\ \sum_{n=1}^N F_n(\omega_1) \cdot \frac{\partial F_n(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 & \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial F_n(\omega_1)}{\partial \omega_1} \right)^2 & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^N F_n(\omega_2) \cdot \frac{\partial F_n(\omega_2)}{\partial \omega_2} & 0 & \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial F_n(\omega_2)}{\partial \omega_2} \right)^2 \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^R \left( \frac{\partial Q_r(x_1)}{\partial x_1} \right)^2 & 0 & \sum_{r=1}^R Q_r(x_1) \cdot \frac{\partial Q_r(x_1)}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \sum_{r=1}^R \left( \frac{\partial Q_r(x_2)}{\partial x_2} \right)^2 & 0 & \sum_{r=1}^R Q_r(x_2) \cdot \frac{\partial Q_r(x_2)}{\partial x_2} \\ \sum_{r=1}^R Q_r(x_1) \cdot \frac{\partial Q_r(x_1)}{\partial x_1} & 0 & \sum_{r=1}^R Q_r^2(x_1) & 0 \\ 0 & \sum_{r=1}^R Q_r(x_2) \cdot \frac{\partial Q_r(x_2)}{\partial x_2} & 0 & \sum_{r=1}^R Q_r^2(x_2) \end{bmatrix},$$

причем в обозначениях (4.62)

$$Z = \partial F_y^T \cdot \partial F_y, \quad V = \partial Q_y^T \cdot \partial Q_y. \quad (4.69)$$

Таким образом, следует заключить, что для производной Нойдеккера справедливо свойство, аналогичное теореме 1,

$$[\partial F_y^T \odot \partial Q_y^T] \cdot [\partial F_y \ominus \partial Q_y] = [\partial F_y^T \cdot \partial F_y] \circ [\partial Q_y^T \cdot \partial Q_y]. \quad (4.70)$$

Другими словами, для блочных матриц согласованной размерности, имеющих ту же структуру, что и  $\partial F_y$ ,  $\partial Q_y$ , выражение (4.53) сводится к виду [50]

$$(A \ominus B) \cdot (C \ominus D) = (A \cdot C) \circ (B \cdot D). \quad (4.71)$$

Результат (4.71), несмотря на справедливость лишь для узкого класса блочных матриц, достаточно важен, поскольку позволяет существенно упростить анализ точности радиолокационных систем, чьи модели сформированы на основе ПХР. Поскольку предложенные символы для обозначения блочных операций торцевого произведения и произведения Хатри-Рао отсутствуют в типовом наборе шрифтов для компьютерной верстки, вместо них могут быть использованы символы “[□]” (БТП) и “[■]” (БПХР).

Возможность факторизации производной Нойдеккера сохраняется и в случае, когда матрица Р выражается через ПХР большей размерности. Применяя аналогичные рассмотренным, но более громоздкие выкладки, можно, например, обобщить соотношение (4.66) на случай М сигналов и 5-компонентного произведения матриц Р.

Предположим, что  $P = Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S \blacksquare L$ , т. е. измерению подлежат угловые координаты, скорость, дальность и, например, ускорение М источников. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \partial Q_y \ominus \partial V_y \ominus \partial F_y \ominus \partial S_y \ominus \partial L_y =$$

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c}
Q_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \\
\hline
Q_2 & Q_2 & Q_2 & Q_2 & \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
Q_M & Q_M & Q_M & Q_M & \frac{\partial Q_M}{\partial x_M}
\end{array} \right] \bullet \\
\\
\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c}
V_1 & V_1 & V_1 & \frac{\partial V_1}{\partial y_1} & V_1 \\
\hline
V_2 & V_2 & V_2 & \frac{\partial V_2}{\partial y_2} & V_2 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
V_M & V_M & V_M & \frac{\partial V_M}{\partial y_M} & V_M
\end{array} \right] \bullet \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c}
F_1 & F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} & F_1 & F_1 \\
\hline
F_2 & F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial \omega} & F_2 & F_2 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
F_M & F_M & \frac{\partial F_M}{\partial \omega} & F_M & F_M
\end{array} \right] \bullet \\
\\
\bullet \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c}
S_1 & \frac{\partial S_1}{\partial z_1} & S_1 & S_1 & S_1 \\
\hline
S_2 & \frac{\partial S_2}{\partial z_2} & S_2 & S_2 & S_2 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
S_M & \frac{\partial S_M}{\partial z_M} & S_M & S_M & S_M
\end{array} \right] \bullet \\
\\
\bullet \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c}
\frac{\partial L_1}{\partial d_1} & L_1 & L_1 & L_1 & L_1 \\
\hline
\frac{\partial L_2}{\partial d_2} & L_2 & L_2 & L_2 & L_2 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\frac{\partial L_M}{\partial d_M} & L_M & L_M & L_M & L_M
\end{array} \right] \bullet
\end{array} \tag{4.72}$$

На примере (4.72) наглядно видны следующие особенности факторизации производной  $\partial P/\partial Y$ , которые могут быть учтены при ее автоматическом формировании:

- количество блок–строк в блочных матрицах определяется числом источников (для  $M$  источников –  $M$  блок–строк), а количество блок–столбцов равно числу матриц, участвующих в формировании ПХР;

- все блок–столбцы, за исключением блок–столбца производных, в пределах одной блочной матрицы тождественны;

- индекс блока во всех блочных матрицах соответствует номеру столбца его элементов, отличного от нуля (все остальные элементы – нулевые), а также номеру источника, чья координата используется в качестве аргумента соответствующей характеристики, в частности, для  $F_4$  и  $\partial F_1/\partial \omega_1$  в матрице  $\partial F_y$  при  $M = 5$

имеем

$$F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_1(\omega_4) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F_N(\omega_4) & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

блок–столбец производных для используемого здесь обратного порядка формирования вектора неизвестных  $Y$  перемещается в блочных матрицах справа налево (в рассматриваемом случае

$$Y = [d_1 \dots d_M \mid z_1 \dots z_M \mid \omega_1 \dots \omega_M \mid y_1 \dots y_M \mid x_1 \dots x_M]^T).$$

Столь детальное рассмотрение свойств факторизации нойдеккерской производной от ПХР играет важную роль при последующем выводе окончательных выражений для составных блоков матрицы Фишера, в состав которых входит производная  $\partial P/\partial Y$ .

В целом, введение блочных вариантов торцевых произведений – далеко идущий по последствиям шаг, способный вызвать

цепную реакцию синтеза новых матричных операций. Дело здесь даже не в элементарном соблюдении требований диалектического подхода, а исключительно в необходимости эффективной реализации возможностей нововведенных торцевых процедур, вынуждающей распространить блочный принцип обобщения на все известные матричные операции. Естественно, для решаемой научной проблемы нет надобности в детальном анализе каждого представителя блочной группы методов. Вполне достаточно ограничиться обсуждением лишь наиболее важных из них. В частности, для формализации модели отклика многосекционной ЦАР с учетом взаимного влияния каналов потребуются блочные обобщения классического способа умножения матриц и кронекеровского (прямого) произведения.

**Определение.** Блочным произведением  $br \times cs$ -матрицы  $A = [A_{ij}]$  и  $bs \times cg$ -матрицы  $B = [B_{ij}]$  ( $i=1, \dots, b; j=1, \dots, c$ ) с согласованным разбиением на блоки размером  $r \times s$  и  $s \times g$  соответственно называется матрица  $A [\times] B$ , определяемая равенством  $A [\times] B = [A_{ij} \cdot B_{ij}]$ .

Пример 6. 
$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] [\times] \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} \cdot B_{11} & A_{12} \cdot B_{12} \\ \hline A_{21} \cdot B_{21} & A_{22} \cdot B_{22} \end{array} \right].$$

Блочная модификация кронекеровского произведения по сути обобщает семейство торцевых и определена как **результат умножения блочных матриц A и B с одинаковым количеством блоков** ( $A = [A_1 \ A_2 \dots A_r]$ ,  $B = [B_1 \ B_2 \dots B_r]$ ) **вида**

$$A [\otimes] B = [A_1 \otimes B_1 \quad A_2 \otimes B_2 \quad \dots \quad A_r \otimes B_r]. \quad (4.73)$$

При необходимости интеграции обработки сигналов по выходам  $K$  секций конформной ЦАР с факторизуемыми ХН следует прибегнуть к помощи указанных блочных модификаций процедур умножения, представив в модели РЛС матрицу результирующих ХН в виде

$$\begin{aligned}
P &= (H [\otimes] W) [\times] (Q \ominus V) = \\
&= \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_K \end{bmatrix} [\otimes] \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_K \end{bmatrix} \right) [\times] \left( \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_K \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_K \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} (H_1 \otimes W_1)(Q_1 \ominus V_1) \\ (H_2 \otimes W_2)(Q_2 \ominus V_2) \\ \vdots \\ (H_K \otimes W_K)(Q_K \ominus V_K) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.74}$$

где  $H, W$  – блочные матрицы коэффициентов взаимного влияния,  $k$ -е блоки которых для секций типа плоских решеток из  $R \times R$  каналов имеют размерность  $R \times R$ ,

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & H_{12k} & \cdots & H_{1Rk} \\ H_{21k} & 1 & \cdots & H_{2Rk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{R1k} & H_{R2k} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad W_k = \begin{bmatrix} 1 & W_{12k} & \cdots & W_{1Rk} \\ W_{21k} & 1 & \cdots & W_{2Rk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{R1k} & W_{R2k} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$|H_{nmk}| < 1, \quad |W_{nmk}| < 1,$$

$K$ -блочные матрицы  $Q$  и  $V$  аналогичны по структуре соответствующим матрицам из (4.55), (4.56).

В заключение следует отметить, что рассмотренные блочные модификации торцевых произведений ориентированы на описание откликов многопозиционных РЛС с ЦАР, состоящими, в общем случае, из нескольких секций и имеющими факторизуемые диаграммы направленности приемных каналов. В ситуациях, когда факторизация диаграмм направленности невозможна, в многокоординатных измерениях целесообразно задействовать более

мощный набор матричных операций, рассматриваемых в следующем пункте.

*Семейство обобщенных торцевых произведений матриц в моделях РЛС с нефакторизуемыми ХНД и неидентичностями приемных каналов*

При невозможности осуществления факторизации ХНД приемных каналов в процессе моделирования ЦАР в многокоординатных измерениях целесообразно задействовать **блочное прямое произведение матриц**. Используя метод умножения (4.73), можно записать модель отклика 4-координатной ЦАР на М сигналов, совпадающую по виду с 1-координатным случаем

$$U = P A + n, \quad (4.75)$$

где  $U$  и  $n$  – блок–матрицы комплексных напряжений и шумов приемных каналов;  $P = Q [\otimes] F [\otimes] S$ ;  $Q = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_M]$ ;  $F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_M]$ ;  $S = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_M]$ ;  $F_m = [F_1(\omega_m) \ F_2(\omega_m) \ \dots \ F_N(\omega_m)]^T$  – блок–вектор амплитудно-частотных характеристик  $N$  цифровых фильтров на частоте  $m$ -го сигнала;  $S_m = [S_1(z_m) \ S_2(z_m) \ \dots \ S_G(z_m)]^T$  – блок–вектор огибающей  $m$ -го сигнала, начинающегося в  $Z_m$ -м отсчете, в  $G$  стробах дальности;  $Q_m = \text{vec } Q(x_m, y_m)$ ,  $Q(x_m, y_m)$  – матрица двумерных нефакторизуемых характеристик направленности антенных элементов плоской решетки в направлении  $m$ -го источника с координатами  $X_m, Y_m$ ; "vec" – оператор, представляющий  $m \times n$ –матрицу через  $mn$ –вектор–столбец;  $A$  – вектор комплексных амплитуд  $M$  сигналов.

Строго говоря, в данном случае выполняется тождество  $P = Q [\otimes] F [\otimes] S = Q \blacksquare F \blacksquare S$ . Однако произведение  $P = Q [\otimes] F [\otimes] S$  имеет право и на самостоятельное рассмотрение, если блоки матрицы  $Q$  не выражать через оператор "vec", а записать в виде

$$Q_m = \begin{bmatrix} Q_{11}(x_m, y_m) & Q_{12}(x_m, y_m) & \cdots & Q_{1R}(x_m, y_m) \\ Q_{21}(x_m, y_m) & Q_{22}(x_m, y_m) & \cdots & Q_{2R}(x_m, y_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{R1}(x_m, y_m) & Q_{R2}(x_m, y_m) & \cdots & Q_{RR}(x_m, y_m) \end{bmatrix}.$$

Такая конструкция блока соответствует значениям диаграмм направленности антенных элементов плоской решетки из  $R \times R$  элементов. Для приведения в соответствие размерности матриц, используемых при описании аналитической модели РЛС с ЦАР, вектор амплитуд в этом случае следует представить в виде прямого произведения  $A \otimes I_R$ , где  $I_R$  – единичная матрица размерности  $R \times R$ . При этом

$$U = (Q [\otimes] F [\otimes] S)(A \otimes I_R) + n. \quad (4.76)$$

Данная запись компактнее и нагляднее по сравнению с трактовкой матрицы  $P$ , использующей произведение Хатри–Рао и представление  $Q$  в виде блока вес-столбцов. Впрочем, при анализе точности измерения подобной ЦАР потребуются дополнительные исследования по оптимизации записи блоков матрицы Фишера.

Особенностью модели (4.76), как и всех ранее рассмотренных, является использование допущения об идентичности амплитудно-частотных характеристик приемных каналов. В тех же случаях, когда ориентация на справедливость данной гипотезы сопряжена с ощутимыми потерями в качестве обработки сигналов, аналитическая модель РЛС со столь специфичной ЦАР может быть формализована на основе использования еще одной группы модификаций торцевого произведения. Речь идет о проникающем торцевом умножении матриц разной размерности, впервые введенном в [46], и базирующихся на нем обобщенных операциях торцевых и блочных торцевых произведений [49].

Суть проникающего торцевого умножения сводится к тому, что в качестве строк, по которым должна "расщепляться" многомерная правая матрица, рассматриваются ряды чисел, располо-

женные в дополнительном по отношению к левой матрице измерении. Принимая во внимание [46], можно дать следующее определение данной процедуры:

**Определение. Проникающим торцевым произведением** [49]  $r \times g$ -матрицы  $A=[a_{ij}]$  на  $n$ -мерную матрицу  $B$  ( $n \geq 3$ ), развернутую в блочную строку или блочный столбец с  $r \times g$ -блоками ( $B=[B_r]$ ), называется матрица той же размерности, что и  $B$ , вида

$$A \blacksquare B = [A \circ B_r] , \quad (4.77)$$

где произведение  $A \circ B_r$  является адамаровым.

Другими словами, для матрицы  $B$ , представленной как блочная строка,

$$A \blacksquare B = [A \circ B_1 \mid A \circ B_2 \mid \dots \mid A \circ B_r \mid \dots] . \quad (4.78)$$

Аналогично, если  $B$  является блочным столбцом, то

$$A \blacksquare B = \begin{bmatrix} A \circ B_1 \\ \hline A \circ B_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A \circ B_r \\ \hline \vdots \end{bmatrix} . \quad (4.79)$$

Пример 6.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{121} & b_{112} & b_{122} & b_{113} & b_{123} \\ b_{211} & b_{221} & b_{212} & b_{222} & b_{213} & b_{223} \\ b_{311} & b_{321} & b_{312} & b_{322} & b_{313} & b_{323} \end{bmatrix},$$

$$A \blacksquare B = \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{111} & a_{12} \times b_{121} & a_{11} \times b_{112} & a_{12} \times b_{122} & a_{11} \times b_{113} & a_{12} \times b_{123} \\ a_{21} \times b_{211} & a_{22} \times b_{221} & a_{21} \times b_{212} & a_{22} \times b_{222} & a_{21} \times b_{213} & a_{22} \times b_{223} \\ a_{31} \times b_{311} & a_{32} \times b_{321} & a_{31} \times b_{312} & a_{32} \times b_{322} & a_{31} \times b_{313} & a_{32} \times b_{323} \end{bmatrix} .$$

Пример 7.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{121} \\ b_{211} & b_{221} \\ \frac{b_{311}}{b_{112}} & \frac{b_{321}}{b_{122}} \\ b_{212} & b_{222} \\ \frac{b_{312}}{b_{113}} & \frac{b_{322}}{b_{123}} \\ b_{213} & b_{223} \\ b_{313} & b_{323} \end{bmatrix}, \quad A \blacksquare B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{111} & a_{12} \cdot b_{121} \\ a_{21} \cdot b_{211} & a_{22} \cdot b_{221} \\ \frac{a_{31} \cdot b_{311}}{a_{11} \cdot b_{112}} & \frac{a_{32} \cdot b_{321}}{a_{12} \cdot b_{122}} \\ a_{21} \cdot b_{212} & a_{22} \cdot b_{222} \\ \frac{a_{31} \cdot b_{312}}{a_{11} \cdot b_{113}} & \frac{a_{32} \cdot b_{322}}{a_{12} \cdot b_{123}} \\ a_{21} \cdot b_{213} & a_{22} \cdot b_{223} \\ a_{31} \cdot b_{313} & a_{32} \cdot b_{323} \end{bmatrix}.$$

Существенно, что определение (4.77) отличается от приведенного в [46] наличием возможности столбцевой ориентации "просачивания" левой матрицы сквозь правую. В случае  $p$ -вектора  $C$  и двумерной матрицы  $B$ , согласованной с ним по количеству строк, имеет место тождество [46]

$$C \square B = C \blacksquare B. \quad (4.80)$$

Аналогично, для согласованных по количеству столбцов  $p$ -строки  $C^T$  и 2-мерной матрицы  $B$  справедливо соотношение

$$C^T \blacksquare B = C^T \square B. \quad (4.81)$$

Среди прочих свойств проникающего торцевого умножения отметим также его коммутативность:  $A \blacksquare B = B \square A$ . Однако для удобства далее будем придерживаться той версии проникающего торцевого произведения, согласно которой матрица меньшей размерности расположена слева.

При трактовании В как матрицы декартовых координат точек, образующих некий геометрический объект, содержащий по две точки в каждой из трех плоскостей, преобразование  $A \blacksquare B$  можно интерпретировать как разовую пространственную деформацию. Ее особенностью является тождественное изменение координат одноименных точек объекта, принадлежащих разным плоскостям.

Торцевое произведение (4.8) в данной ситуации производит взвешенное "тиражирование" трехмерной матрицы, повторяя его согласно количеству столбцов двумерной. Спецификой же проникающего торцевого произведения является "просачивание" двумерной матрицы сквозь трехмерную без изменения размерности последней (развернутая запись в (4.78, 4.79) и примерах 6, 7 дана для наглядности). Таким образом, введенная в (4.77) операция позволяет формализовать процесс "просачивания" дискретных множеств сквозь множества большей размерности, математическое моделирование которого часто необходимо для анализа систем. К примеру, для 3-координатной доплеровской РЛС с плоской ЦАР, диаграммы направленности антенных элементов которой не поддаются факторизации, в односигнальной ситуации можно записать с помощью (4.77) бесшумовую аналитическую модель сигналов по выходу R частотных фильтров, учитывающую различия в АЧХ приемных каналов [49]

$$U = \dot{a} \cdot (Q \blacksquare F) = \dot{a} \cdot [Q \circ F_1 \mid Q \circ F_2 \mid \dots \mid Q \circ F_r \mid \dots] \quad (4.82)$$

Здесь  $\dot{a}$  – комплексная амплитуда сигнала;

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11}(x, y) & \dot{Q}_{12}(x, y) & \dots & \dot{Q}_{1R}(x, y) \\ \dot{Q}_{21}(x, y) & \dot{Q}_{22}(x, y) & \dots & \dot{Q}_{2R}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x, y) & \dot{Q}_{R2}(x, y) & \dots & \dot{Q}_{RR}(x, y) \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица комплекс-}$$

ных характеристик направленности антенных элементов плоской ЦАР;

$$F = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} F_{111}(\omega) & \dots & F_{1R1}(\omega) & F_{112}(\omega) & \dots & F_{1R2}(\omega) & \dots & F_{11N}(\omega) & \dots & F_{1RN}(\omega) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_{R11}(\omega) & \dots & F_{RR1}(\omega) & F_{R12}(\omega) & \dots & F_{RR2}(\omega) & \dots & F_{R1N}(\omega) & \dots & F_{RRN}(\omega) \end{array} \right]$$

блок–матрица комплексных частотных характеристик фильтров  $\dot{F}_{rmn}(\omega)$  на частоте сигнала  $\omega$ , при этом номер блока  $n$  соответствует номерам доплеровских фильтров, а первые два номера в индексах элементов каждого блока ( $rm$ ) тождественны номерам индексов матрицы  $Q$  и обозначают номер приемного канала. Таким образом, каждый  $n$ -й блок произведения  $Q \blacksquare F$  может быть представлен в виде

$$Q \circ F_n = \left[ \begin{array}{ccc} \dot{Q}_{11}(x, y) \cdot \dot{F}_{11n}(\omega) & \dot{Q}_{12}(x, y) \cdot \dot{F}_{12n}(\omega) & \dots & \dot{Q}_{1R}(x, y) \cdot \dot{F}_{1Rn}(\omega) \\ \dot{Q}_{21}(x, y) \cdot \dot{F}_{21n}(\omega) & \dot{Q}_{22}(x, y) \cdot \dot{F}_{22n}(\omega) & \dots & \dot{Q}_{2R}(x, y) \cdot \dot{F}_{2Rn}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x, y) \cdot \dot{F}_{R1n}(\omega) & \dot{Q}_{R2}(x, y) \cdot \dot{F}_{R2n}(\omega) & \dots & \dot{Q}_{RR}(x, y) \cdot \dot{F}_{RRn}(\omega) \end{array} \right]$$

При решении дальномерно-пеленгационной задачи в импульсной РЛС с плоской ЦАР неидентичности приемных каналов могут быть учтены интегрально во всей полосе приема путем различного описания огибающей импульсов в каждом канале решетки. Соответствующая модель откликов трехкоординатной импульсной РЛС на одиночный источник может быть также записана на основе проникающего торцевого произведения [49]

$$U = \dot{a} \cdot (Q \blacksquare S) = \dot{a} \cdot [Q \circ S_1 \mid Q \circ S_2 \mid \dots \mid Q \circ S_t \mid \dots], \quad (4.83)$$

где блоки произведений Адамара на этот раз выражены в виде

$$Q \circ S_g = \left[ \begin{array}{ccc} \dot{Q}_{11}(x, y) \times S_{11g}(z) & \dot{Q}_{12}(x, y) \cdot S_{12g}(z) & \dots & \dot{Q}_{1R}(x, y) \times S_{1Rg}(z) \\ \dot{Q}_{21}(x, y) \cdot S_{21g}(z) & \dot{Q}_{22}(x, y) \cdot S_{22g}(z) & \dots & \dot{Q}_{2R}(x, y) \cdot S_{2Rg}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x, y) \cdot S_{R1g}(z) & \dot{Q}_{R2}(x, y) \cdot S_{R2g}(z) & \dots & \dot{Q}_{RR}(x, y) \cdot S_{RRg}(z) \end{array} \right];$$

$S_{nmg}(z)$  – отклик  $g$ -го строба дальности в  $nm$ -м приемном канале.

Следует отметить, что в зависимости от осуществляемой обработки в качестве  $S_{nmg}(z)$  может рассматриваться не только результат дополнительного стробирования отсчетов АЦП, но и сама дискретная огибающая импульсного сигнала в  $z$  –  $m$  по номеру отсчете. Это следует иметь в виду, поскольку в комментариях к последующим выкладкам в интересах компактности изложения будет указываться только первая из возможных трактовок указанной функции параметра  $z$ .

Что касается 4-координатной РЛС с плоской ЦАР, в которой производится совместное оценивание дальности, частоты и угловых координат целей, то для формализации модели такой системы с учетом неидентичностей каналов удобно воспользоваться обобщенным торцевым произведением (ОТП). Данный тип умножения предназначен исключительно для блочных матриц, имеющих блоки равной размерности, и может быть определен следующим образом.

**Определение. Обобщенным торцевым произведением** блочных матриц  $A = [A_{ij}]$  и  $B = [B_{ig}]$  с согласованным разбиением на блоки равной размерности и одинаковым количеством блок-строк называется матрица  $A \overset{\square}{\square} B$ , в которой каждая  $i$ -я блок-строка представляет собой совокупность проникающих торцевых произведений всех блоков  $A_{ij}$   $i$ -й блок-строки левой матрицы на соответствующую ей по номеру блок-строку  $B_i = [B_{i1} \ B_{i2} \ \dots \ B_{iG}]$  правой матрицы  $B$ :

$$A \overset{\square}{\square} B = [A_{ij} \ \overset{\square}{\square} [B_{i1} \ B_{i2} \ \dots \ B_{iG}]], \quad (4.84)$$

где  $\overset{\square}{\square}$  – символ проникающего торцевого произведения.

Пример 8.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1T} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2T} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{P1} & A_{P2} & \cdots & A_{PT} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1G} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{P1} & B_{P2} & \cdots & B_{PG} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_{11} \square [B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1G}] & A_{12} \square [B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1G}] & \cdots & A_{1T} \square [B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1G}] \\ A_{21} \square [B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2G}] & A_{22} \square [B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2G}] & \cdots & A_{2T} \square [B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2G}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{P1} \square [B_{P1} & B_{P2} & \cdots & B_{PG}] & A_{P2} \square [B_{P1} & B_{P2} & \cdots & B_{PG}] & \cdots & A_{PT} \square [B_{P1} & B_{P2} & \cdots & B_{PG}] \end{array} \right].$$

Проводя сопоставление торцевого произведения с матричной операцией (4.84), нетрудно заметить, что ОТП по сути является его аналогом, только на более высоком уровне обобщения, при котором в роли элементов матриц, фигурировавших прежде в торцевом умножении, теперь выступают матричные блоки, а вместо обычного произведения в ОТП фактически используется произведение Адамара (см. определение проникающего торцевого умножения (4.77)).

Примечательно, что в теоретическом плане можно бесконечно повышать уровень обобщения в ОТП, рассматривая последовательно совокупность блоков блочных матриц как элементы некоей новой "сверхматрицы", переходя тем самым от описания одних иерархических уровней сложных систем к другим. Подробнее о возможном варианте конкретного механизма такого обобщения речь пойдет далее при рассмотрении блочной модификации ОТП. О том же, насколько мощным оказывается нововведенный матричный аппарат, позволяет судить напрашивающаяся аналогия его абстрагированной процедуры с единством иерархических обобщений, присущих известным формам существования материи. Исходным пунктом таковых можно считать, к примеру, субэлементарные и элементарные частицы. Их производными, как известно, являются атомы, образующие молекулы, агрегированные в физические тела и т. д. Таким образом, методологиче-

ская значимость матричного произведения (4.84) выходит далеко за пределы рассматриваемых здесь вопросов, и заключает в себе большие потенциальные возможности как перспективного средства общесистемного анализа и синтеза.

Определившись с терминологией и особенностями используемого матричного аппарата, далее можно приступить к рассмотрению искомой математической модели четырехкоординатной РЛС с ЦАР. В случае одиночного сигнала, источник которого подпадает под определение точечного, массив выходных, незашумленных (для удобства) напряжений приемных каналов цифровой диаграммообразующей схемы после дополнительного стробирования отсчетов АЦП по дальности и формирования частотных фильтров может быть записан в виде

$$U = (Q \square \{S \tilde{\square} F\}) \cdot \dot{a} = Q \square [S_1 \square F | S_2 \square F | \dots | S_T \square F] \cdot \dot{a} \quad (4.85)$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11}(x, y) & \dot{Q}_{12}(x, y) & \dots & \dot{Q}_{1R}(x, y) \\ \dot{Q}_{21}(x, y) & \dot{Q}_{22}(x, y) & \dots & \dot{Q}_{2R}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x, y) & \dot{Q}_{R2}(x, y) & \dots & \dot{Q}_{RR}(x, y) \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица}$$

комплексных характеристик направленности антенных элементов плоской ЦАР;

$$S = [S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_G] = \begin{bmatrix} S_{111}(z) & \dots & S_{1R1}(z) & | & S_{112}(z) & \dots & S_{1R2}(z) & | & \dots & | & S_{11G}(z) & \dots & S_{1RG}(z) \\ \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots & \dots & \vdots & | & \dots & | & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{R11}(z) & \dots & S_{RR1}(z) & | & S_{R12}(z) & \dots & S_{RR2}(z) & | & \dots & | & S_{R1G}(z) & \dots & S_{RRG}(z) \end{bmatrix}$$

– блок–матрица откликов G стробов дальности R×R приемных каналов, различия в АЧХ которых приводят к неидентичностям

оггибающих импульсных сигналов (у каждого  $rm$ -го канала в  $g$ -м стробе дальности будет своя, уникальная оггибающая импульсного сигнала  $S_{rmg}(z)$ );

$$F = \begin{bmatrix} F_{111}(\omega) & \cdots & F_{1R1}(\omega) & F_{112}(\omega) & \cdots & F_{1R2}(\omega) & \cdots & F_{11N}(\omega) & \cdots & F_{1RN}(\omega) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R11}(\omega) & \cdots & F_{RR1}(\omega) & F_{R12}(\omega) & \cdots & F_{RR2}(\omega) & \cdots & F_{R1N}(\omega) & \cdots & F_{RRN}(\omega) \end{bmatrix}$$

– блок–матрица характеристик  $N$  частотных фильтров на частоте сигнала  $\omega$  для  $R \times R$  приемных каналов ЦАР (каждый  $rm$ -й канал характеризуется специфичной АЧХ  $n$ -го частотного фильтра  $F_{rmn}(\omega)$ ).

В более сложном многопозиционном случае, когда все позиции представляют собой 4-координатные РЛС с ЦАР (4.85), общую аналитическую модель мультистатической системы при решении дальномерно-пеленгационной задачи по одиночному источнику можно также формализовать с помощью ОТП (4.84):

$$\tilde{U} = (\tilde{Q} \quad \tilde{\square} \quad \{\tilde{S} \quad \tilde{\square} \quad \tilde{F}\}) \cdot \dot{a}, \quad (4.86)$$

где блочные матрицы  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{F}$  имеют тот же смысл, что и в (4.85), но отличаются от последнего наличием дополнительного индекса в элементах блочных матриц, который соответствует номеру позиции многопозиционной системы:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{111}(x, y) & \dot{Q}_{121}(x, y) & \cdots & \dot{Q}_{1R1}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R11}(x, y) & \dot{Q}_{R21}(x, y) & \cdots & \dot{Q}_{RR1}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{11p}(x, y) & \dot{Q}_{12p}(x, y) & \cdots & \dot{Q}_{1Rp}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1p}(x, y) & \dot{Q}_{R2p}(x, y) & \cdots & \dot{Q}_{RRp}(x, y) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{11} & \tilde{\mathbf{S}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{1G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{S}}_{P1} & \tilde{\mathbf{S}}_{P2} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{PG} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_{1111}(z) & \cdots & S_{1R11}(z) & S_{1112}(z) & \cdots & S_{1R12}(z) & \cdots & S_{111G}(z) & \cdots & S_{1R1G}(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{R111}(z) & \cdots & S_{RR11}(z) & S_{R112}(z) & \cdots & S_{RR12}(z) & \cdots & S_{R11G}(z) & \cdots & S_{RR1G}(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{S}_{11P1}(z) & \cdots & \tilde{S}_{1RP1}(z) & \tilde{S}_{11P2}(z) & \cdots & \tilde{S}_{1RP2}(z) & \cdots & \tilde{S}_{11PG}(z) & \cdots & \tilde{S}_{1RPG}(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{R1P1}(z) & \cdots & S_{RRP1}(z) & S_{R1P2}(z) & \cdots & S_{RRP2}(z) & \cdots & S_{R1PG}(z) & \cdots & S_{RRPG}(z) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{11} & \tilde{\mathbf{F}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathbf{F}}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_{P1} & \tilde{\mathbf{F}}_{P2} & \cdots & \tilde{\mathbf{F}}_{PN} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} F_{1111}(\omega) & \cdots & F_{1R11}(\omega) & F_{1112}(\omega) & \cdots & F_{1R12}(\omega) & \cdots & F_{111N}(\omega) & \cdots & F_{1R1N}(\omega) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R111}(\omega) & \cdots & F_{RR11}(\omega) & F_{R112}(\omega) & \cdots & F_{RR12}(\omega) & \cdots & F_{R11N}(\omega) & \cdots & F_{RR1N}(\omega) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{F}_{11P1}(\omega) & \cdots & \tilde{F}_{1RP1}(\omega) & \tilde{F}_{11P2}(\omega) & \cdots & \tilde{F}_{1RP2}(\omega) & \cdots & \tilde{F}_{11PN}(\omega) & \cdots & \tilde{F}_{1RPN}(\omega) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R1P1}(\omega) & \cdots & F_{RRP1}(\omega) & F_{R1P2}(\omega) & \cdots & F_{RRP2}(\omega) & \cdots & F_{R1PN}(\omega) & \cdots & F_{RRPN}(\omega) \end{bmatrix}.$$

Используя блочные обозначения, в развернутом виде соотношения (4.86) можно детализировать с учетом определения (4.84):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \\ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}_P \end{bmatrix} \tilde{\square} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{11} & \tilde{\mathbf{S}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{1G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{S}}_{P1} & \tilde{\mathbf{S}}_{P2} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{PG} \end{bmatrix} \tilde{\square}$$

$$\tilde{\square} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & \cdots & \tilde{F}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{F}_{p1} & \tilde{F}_{p2} & \cdots & \tilde{F}_{pN} \end{pmatrix} \cdot \dot{a} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \square [\tilde{S}_{11} \square [F_{11} \cdots F_{1N}]] & \tilde{Q}_1 \square [\tilde{S}_{12} \square [F_{11} \cdots F_{1N}]] & \cdots & \tilde{Q}_1 \square [\tilde{S}_{1G} \square [F_{11} \cdots F_{1N}]] \\ \tilde{Q}_2 \square [\tilde{S}_{21} \square [F_{21} \cdots F_{2N}]] & \tilde{Q}_2 \square [\tilde{S}_{22} \square [F_{21} \cdots F_{2N}]] & \cdots & \tilde{Q}_2 \square [\tilde{S}_{2G} \square [F_{21} \cdots F_{2N}]] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{Q}_p \square [\tilde{S}_{p1} \square [F_{p1} \cdots F_{pN}]] & \tilde{Q}_p \square [\tilde{S}_{p2} \square [F_{p1} \cdots F_{pN}]] & \cdots & \tilde{Q}_p \square [\tilde{S}_{pG} \square [F_{p1} \cdots F_{pN}]] \end{bmatrix} \dot{a}, \quad (4.87)$$

где каждый  $pgn$ -й блок результирующей матрицы  $U$  определяется произведением Адамара соответствующих блоков матриц  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{F}$ :

$$\tilde{U}_{pgn} = (\tilde{Q}_p \circ \tilde{S}_{pg} \circ \tilde{F}_{pn}) \cdot \dot{a} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{a} \cdot \dot{Q}_{1p}(x,y) \cdot S_{11pg}(z) \cdot F_{11pn}(\omega) & \cdots & \dot{a} \cdot \dot{Q}_{1Rp}(x,y) \cdot S_{1Rpg}(z) \cdot F_{1Rpn}(\omega) \\ \dot{a} \cdot \dot{Q}_{21p}(x,y) \cdot S_{21pg}(z) \cdot F_{21pn}(\omega) & \cdots & \dot{a} \cdot \dot{Q}_{2Rp}(x,y) \cdot S_{2Rpg}(z) \cdot F_{2Rpn}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{a} \cdot \dot{Q}_{R1p}(x,y) \cdot S_{R1pg}(z) \cdot F_{R1pn}(\omega) & \cdots & \dot{a} \cdot \dot{Q}_{RRp}(x,y) \cdot S_{RRpg}(z) \cdot F_{RRpn}(\omega) \end{bmatrix}.$$

При необходимости совместного оценивания угловых координат и дальностей  $M$  источников, в случае неидентичных характеристик приемных каналов ЦАР, решение измерительной задачи нуждается во введении еще одного понятия – **блочного обобщенного торцевого произведения (БОТП)** матриц [81]. Согласно названию, данная операция сводится к выполнению поблочной процедуры обобщенного торцевого произведения.

Как уже отмечалось, ОТП примечательно возможностью осуществления различных по уровням обобщений, при которых совокупность блоков блочных матриц может трактоваться как но-

вый блок матрицы более высокой размерности. В отличие же от ОТП, идея его блочной модификации состоит в наложении ограничений на операцию умножения, которые сводятся к тому, что в рамках новой операции процедура ОТП выполняется поблочно, между блоками одного иерархического уровня.

**Определение. Блочным обобщенным торцевым произведением**  $dbp \times ngs$ -матрицы  $A = [A_{bg}]_{dn}$  и  $dbp \times nks$ -матрицы  $B = [B_{bk}]_{dn}$ , состоящих из одинакового количества  $(d \times n)$  суперблоков, размерностью  $b \times g$  и  $b \times k$  соответственно, образованных  $b$  блоками строками каждый, в составе  $g$  (матрица  $A$ ) и  $k$  (матрица  $B$ )  $p \times s$ -блоков, называется  $dbp \times ngs$ -матрица  $A \tilde{\otimes} B$ , каждый  $dn$ -й суперблок которой представляет собой обобщенное торцевое произведение соответствующих суперблоков исходных матриц, то есть

$$A \tilde{\otimes} B = [A_{bg} \tilde{\square} B_{bk}]_{dn}. \quad (4.88)$$

Пример 9.

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{121} & A_{112} & A_{122} \\ A_{211} & A_{221} & A_{212} & A_{222} \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{cc|cc} B_{111} & B_{121} & B_{112} & B_{122} \\ B_{211} & B_{221} & B_{212} & B_{222} \end{array} \right],$$

$$A \tilde{\otimes} B = \left[ \left[ \begin{array}{cc} A_{111} & A_{121} \\ A_{211} & A_{221} \end{array} \right] \tilde{\square} \left[ \begin{array}{cc} B_{111} & B_{121} \\ B_{211} & B_{221} \end{array} \right] \middle| \left[ \begin{array}{cc} A_{112} & A_{122} \\ A_{212} & A_{222} \end{array} \right] \tilde{\square} \left[ \begin{array}{cc} B_{112} & B_{122} \\ B_{212} & B_{222} \end{array} \right] \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} A_{111} \square [B_{111} & B_{121}] & A_{121} \square [B_{111} & B_{121}] & A_{112} \square [B_{112} & B_{122}] & A_{122} \square [B_{112} & B_{122}] \\ A_{211} \square [B_{211} & B_{221}] & A_{221} \square [B_{211} & B_{221}] & A_{212} \square [B_{212} & B_{222}] & A_{222} \square [B_{212} & B_{222}] \end{array} \right].$$

Учитывая данное определение, рассмотрим вначале однопозиционную радиолокационную систему, решающую дальномерно-пеленгационную задачу по  $M$  источникам сигналов. Напряжения ее выходной импульсной смеси без учета шумов могут быть представлены с помощью операции блочного ОТП в виде

$$U = (Q \tilde{\Theta} S)(A \otimes 1_R \otimes 1_G), \quad (4.89)$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{11}(x_M, y_M) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x_M, y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{RR}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{R1}(x_M, y_M) & \cdots & \dot{Q}_{RR}(x_M, y_M) \end{bmatrix};$$

$$S = [S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_M],$$

причем

$$S_m = \begin{bmatrix} S_{111}(z_m) & \cdots & S_{1R1}(z_m) & \cdots & S_{11G}(z_m) & \cdots & S_{1RG}(z_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{R11}(z_m) & \cdots & S_{RR1}(z_m) & \cdots & S_{R1G}(z_m) & \cdots & S_{RRG}(z_m) \end{bmatrix};$$

$A = [\dot{a}_1 \dot{a}_2 \cdots \dot{a}_m]^T$  – вектор комплексных амплитуд  $M$  сигналов;  $1_R, 1_G$  – единичные матрицы размерности  $R \times R$  и  $G \times G$  соответственно; блок–матрица  $U$  с элементами  $\dot{U}_{kr} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m \cdot S_{nrg}(z_m) \times Q_{kr}(x_m, y_m)$  имеет вид

$$U = \begin{bmatrix} \dot{U}_{111} & \cdots & \dot{U}_{1R1} & \cdots & \dot{U}_{11G} & \cdots & \dot{U}_{1RG} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{U}_{R11} & \cdots & \dot{U}_{RR1} & \cdots & \dot{U}_{R1G} & \cdots & \dot{U}_{RRG} \end{bmatrix}.$$

При проведении 4-координатных измерений модель (4.89), дополненная частотной селекцией, преобразуется в следующую матричную запись

$$U = (Q \tilde{\Theta} S \tilde{\Theta} F)(A \otimes 1_R \otimes 1_G \otimes 1_N), \quad (4.90)$$

где, в отличие от (4.89), блок–матрица  $U$  дополняется новыми

блоками, индексированными по номерам частотных фильтров

$$U = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1111} & \cdots & \dot{U}_{1R11} & \cdots & \dot{U}_{11G1} & \cdots & \dot{U}_{1RG1} & \cdots & \dot{U}_{11GN} & \cdots & \dot{U}_{1RGN} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{U}_{R111} & \cdots & \dot{U}_{RR11} & \cdots & \dot{U}_{R1G1} & \cdots & \dot{U}_{RRG1} & \cdots & \dot{U}_{R1GN} & \cdots & \dot{U}_{RRGN} \end{bmatrix},$$

причем

$$\dot{U}_{krgn} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m \cdot S_{krg}(z_m) \cdot Q_{kr}(x_m, y_m) \cdot F_{krn}(\omega_m);$$

$$F = [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_M];$$

$$F_m = \begin{bmatrix} F_{111}(\omega_m) & \cdots & F_{1R1}(\omega_m) & \cdots & F_{11N}(\omega_m) & \cdots & F_{1RN}(\omega_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R11}(\omega_m) & \cdots & F_{RR1}(\omega_m) & \cdots & F_{R1N}(\omega_m) & \cdots & F_{RRN}(\omega_m) \end{bmatrix};$$

$1_G$  – единичная  $G \times G$  – матрица.

Для многопозиционного случая соотношения (4.89), (4.90) можно обобщить следующим образом:

$$U = (\tilde{Q} \quad \tilde{\Theta} \quad \tilde{S})(A \otimes 1_R \otimes 1_G); \quad (4.91)$$

$$U = (\tilde{Q} \quad \tilde{\Theta} \quad \tilde{S} \quad \tilde{\Theta} \quad \tilde{F})(A \otimes 1_R \otimes 1_G \otimes 1_N), \quad (4.92)$$

где

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{111}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{1R1}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{111}(x_M, y_M) & \cdots & \dot{Q}_{1R1}(x_M, y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R11}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{RR1}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{R11}(x_M, y_M) & \cdots & \dot{Q}_{RR1}(x_M, y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{11P}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{1RP}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{11P}(x_M, y_M) & \cdots & \dot{Q}_{1RP}(x_M, y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1P}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{RRP}(x_1, y_1) & \cdots & \dot{Q}_{R1P}(x_M, y_M) & \cdots & \dot{Q}_{RRP}(x_M, y_M) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \cdots & \tilde{S}_{1M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{S}_{p1} & \tilde{S}_{p2} & \cdots & \tilde{S}_{pM} \end{bmatrix}; \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & \cdots & \tilde{F}_{1M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{F}_{p1} & \tilde{F}_{p2} & \cdots & \tilde{F}_{pM} \end{bmatrix}, \text{ причем}$$

$$\tilde{S}_{pm} = \begin{bmatrix} S_{11p1}(z_m) & \cdots & S_{1Rp1}(z_m) & \cdots & S_{11pG}(z_m) & \cdots & S_{1RpG}(z_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{R1p1}(z_m) & \cdots & S_{RRp1}(z_m) & \cdots & S_{R1pG}(z_m) & \cdots & S_{RRpG}(z_m) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{F}_{pm} = \begin{bmatrix} F_{11p1}(\omega_m) & \cdots & F_{1Rp1}(\omega_m) & \cdots & F_{11pN}(\omega_m) & \cdots & F_{1RpN}(\omega_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R1p1}(\omega_m) & \cdots & F_{RRp1}(\omega_m) & \cdots & F_{R1pN}(\omega_m) & \cdots & F_{RRpN}(\omega_m) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что особенностью приведенных много-сигнальных моделей является представление амплитудного множителя в виде кронекеровского произведения вектора амплитуд на единичные матрицы. Для уменьшения количества последних имеет смысл воспользоваться формализацией многосигнальных моделей РЛС на основе операций транспонированных ОТП и БОТП [81].

Как и в случае с торцевыми произведениями, целесообразность введения транспонированных альтернатив обобщенным торцевым операциям логически обусловлена уже самим фактом существования принципа симметрии. Поэтому, по аналогии с ранее рассмотренными понятиями, дадим указанным операциям матричного умножения следующие определения.

**Определение.** Транспонированным обобщенным торцевым произведением (ТОТП) блочных матриц  $A = [A_{ij}]$  и  $B = [B_{gj}]$  с согласованным разбиением на блоки равной размерности и одинаковым количеством блок–столбцов называется матрица  $A \tilde{\square} B$ , в которой каждый  $j$ -й блок–столбец представляет

собой совокупность проникающих торцевых произведений всех блоков  $A_{ij}$   $j$ -го блок–столбца левой матрицы на соответствующий

ему по номеру блок–столбец  $B_j = \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{Gj} \end{bmatrix}$  правой матрицы  $B$

$$A \overset{\sim}{\square} B = \left[ A_{ij} \overset{\sim}{\square} \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{Gj} \end{bmatrix} \right], \quad (4.93)$$

где  $\overset{\sim}{\square}$  – символ проникающего торцевого произведения.

Пример 10 [81].

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1T} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2T} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{P1} & A_{P2} & \cdots & A_{PT} \end{bmatrix} \overset{\sim}{\square} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1G} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{P1} & B_{P2} & \cdots & B_{PG} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} A_{11} \overset{\sim}{\square} \\ B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{P1} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} A_{12} \overset{\sim}{\square} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{P2} \end{array} \right] & \cdots & \left[ \begin{array}{c} A_{1T} \overset{\sim}{\square} \\ B_{1G} \\ B_{2G} \\ \vdots \\ B_{PG} \end{array} \right] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left[ \begin{array}{c} A_{P1} \overset{\sim}{\square} \\ B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{P1} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} A_{P2} \overset{\sim}{\square} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{P2} \end{array} \right] & \cdots & \left[ \begin{array}{c} A_{PT} \overset{\sim}{\square} \\ B_{1G} \\ B_{2G} \\ \vdots \\ B_{PG} \end{array} \right] \end{bmatrix}.$$

**Определение.** Транспонированным блочным обобщенным торцевым произведением (ТБОП)  $dbp \times ngs$ -матрицы  $A = [A_{bg}]_{dn}$  и  $dkp \times ngs$ -матрицы  $B = [B_{kg}]_{dn}$ , состоящих из одинакового количества  $(d \times n)$  суперблоков, размерностью  $b \times g$  и  $k \times g$  соответственно, образованных  $g$  блок-столбцами каждый, в составе  $b$  (матрица  $A$ ) и  $k$  (матрица  $B$ )  $p \times s$ -блоков, называется  $dbkp \times ngs$  матрица  $A \tilde{\otimes} B$ , каждый  $dn$ -й суперблок которой представляет собой транспонированное обобщенное торцевое произведение соответствующих суперблоков исходных матриц, то есть

$$A \tilde{\otimes} B = [A_{bg} \tilde{\square} B_{kg}]_{dn}. \quad (4.94)$$

Пример 11.

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} A_{111} & A_{121} & A_{112} & A_{122} \\ A_{211} & A_{221} & A_{212} & A_{222} \end{array} \right],$$

$$B = \left[ \begin{array}{cc|cc} B_{111} & B_{121} & B_{112} & B_{122} \\ B_{211} & B_{221} & B_{212} & B_{222} \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} A \tilde{\otimes} B &= \left[ \begin{array}{cc} [A_{111} & A_{121}] \\ [A_{211} & A_{221}] \end{array} \tilde{\square} \left[ \begin{array}{cc} [B_{111} & B_{121}] \\ [B_{211} & B_{221}] \end{array} \right] \middle| \left[ \begin{array}{cc} [A_{112} & A_{122}] \\ [A_{212} & A_{222}] \end{array} \right] \tilde{\square} \left[ \begin{array}{cc} [B_{112} & B_{122}] \\ [B_{212} & B_{222}] \end{array} \right] \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} A_{111} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{111} \\ B_{211} \end{bmatrix} & A_{121} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{121} \\ B_{221} \end{bmatrix} & A_{112} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{112} \\ B_{212} \end{bmatrix} & A_{122} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{122} \\ B_{222} \end{bmatrix} \\ A_{211} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{111} \\ B_{211} \end{bmatrix} & A_{221} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{121} \\ B_{221} \end{bmatrix} & A_{212} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{112} \\ B_{212} \end{bmatrix} & A_{222} \tilde{\square} \begin{bmatrix} B_{122} \\ B_{222} \end{bmatrix} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Для сохранения преемственности в системе матричных обозначений, использованной выше при описании пеленгационных характеристик РЛС, АЧХ доплеровских фильтров и откликов

стролирующих по дальности процедур, необходимо дополнить пакет нововведений рассмотрением операции **блочной ротации** матриц [81].

**Определение.** **Блочной ротацией** блок–матрицы  $A$ , каждый из блоков  $A_{ij}$  которой является, в свою очередь, блок–строкой или блок–столбцом, называется операция, сводящаяся к нетранспонированному развороту указанных блок–строк (блок–столбцов) искомой матрицы относительно их первых блоков в направлении часовой стрелки (против часовой стрелки соответственно), в результате которого блок–строки превращаются в блок–столбцы или, наоборот, блок–столбцы становятся блок–строками. При этом внутри блоков, образующих блок–строки (блок–столбцы), никаких изменений не происходит, неизменной остается и структура матрицы  $A$  на уровне блоков  $A_{ij}$ .

Для обозначения новой операции по аналогии с транспонированием будем использовать в качестве верхнего индекса при блочных матрицах символ "R" как сокращение от слова "rotation".

Пример 12.1.

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \hline A_{p1} & A_{p2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} A_{111} & A_{112} & A_{113} & A_{121} & A_{122} & A_{123} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{p11} & A_{p12} & A_{p13} & A_{p21} & A_{p22} & A_{p23} \end{array} \right],$$

$$A^R = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11}^R & A_{12}^R \\ \vdots & \vdots \\ \hline A_{p1}^R & A_{p2}^R \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{111} & A_{121} \\ A_{112} & A_{122} \\ \hline A_{113} & A_{123} \\ \vdots & \vdots \\ \hline A_{p11} & A_{p21} \\ A_{p12} & A_{p22} \\ A_{p13} & A_{p23} \end{array} \right].$$

Пример 12.2.

$$\mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{P1} & B_{P2} & B_{P3} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} B_{111} & B_{121} & B_{131} \\ \hline B_{112} & B_{122} & B_{132} \\ \hline B_{113} & B_{123} & B_{133} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{P11} & B_{P21} & B_{P31} \\ \hline B_{P12} & B_{P22} & B_{P32} \\ \hline B_{P13} & B_{P23} & B_{P33} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B}^R = \left[ \begin{array}{c|c|c} B_{11}^R & B_{21}^R & B_{31}^R \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{1P}^R & B_{2P}^R & B_{3P}^R \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} B_{111} & B_{211} & B_{311} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{11P} & B_{21P} & B_{31P} \\ \hline B_{121} & B_{221} & B_{321} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{12P} & B_{22P} & B_{32P} \\ \hline B_{131} & B_{231} & B_{331} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline B_{13P} & B_{23P} & B_{33P} \end{array} \right].$$

С помощью операции блочной ротации можно установить взаимосвязь обычного произведения матриц и торцевых.

Свойство. Для матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  согласованной размерности справедливо тождество

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left( \sum_{\oplus} (\mathbf{A}^T \square \mathbf{B}) \right)^R = \left( \sum_{\oplus} (\mathbf{B}^T \blacksquare \mathbf{A}) \right)^R, \quad (4.95)$$

где  $R$  – символ блочной ротации;  $\sum_{\oplus}$  – прямая сумма строк;  $\sum_{\ominus}$  – прямая сумма столбцов.

Пример 13.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}; \quad (4.96)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{11} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{21} + \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{22} + \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{32} \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{11} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{21} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{22} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{32} \end{array} \right]; \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \square \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{21} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{23} \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} \end{bmatrix} = \\ &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{11} & \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{12} & \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{11} & \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{22} & \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{22} \\ \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{32} & \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{32} \end{array} \right]; \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\sum_{\oplus} (\mathbf{A}^T \square \mathbf{B}) = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{11} & \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{12} & \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{11} & \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{12} \\ + & + & + & + \\ \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{22} & \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{22} \\ + & + & + & + \\ \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{32} & \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{32} \end{array} \right]; \quad (4.99)$$

$$\left( \sum_{\oplus} (\mathbf{A}^T \square \mathbf{B}) \right)^R =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{11} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{21} + \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{11}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}_{22} + \mathbf{a}_{13}\mathbf{b}_{32} \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{11} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{21} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{31} & \mathbf{a}_{21}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{b}_{22} + \mathbf{a}_{23}\mathbf{b}_{32} \end{array} \right] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}; \quad (4.100)$$

$$\mathbf{B}^T \blacksquare \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{31} \\ \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{32} \end{bmatrix} \blacksquare \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_{11}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{b}_{21}\mathbf{a}_{12} & \mathbf{b}_{31}\mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{b}_{11}\mathbf{a}_{21} & \mathbf{b}_{21}\mathbf{a}_{22} & \mathbf{b}_{31}\mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{b}_{12}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{b}_{22}\mathbf{a}_{12} & \mathbf{b}_{32}\mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{b}_{12}\mathbf{a}_{21} & \mathbf{b}_{22}\mathbf{a}_{22} & \mathbf{b}_{32}\mathbf{a}_{23} \end{array} \right]; \quad (4.101)$$

$$\sum \oplus (B^T \blacksquare A) = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + b_{31}a_{13} \\ b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} + b_{31}a_{23} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{32}a_{13} \\ b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} + b_{32}a_{23} \end{bmatrix} = ; \quad (4.102)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\left( \sum \oplus (B^T \blacksquare A) \right)^R =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \vdots & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \vdots & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix} = A \cdot B. \quad (4.103)$$

В пакете MatLab имеется собственная версия процедуры ротации  $\text{rot}(A)$ , существенно отличающаяся от предложенной. К сожалению, матлабовский вариант вращения при блочной структуре матриц дает результат, непригодный для использования в рамках решаемой здесь проблемы.

Руководствуясь совокупностью нововведенных понятий, получим альтернативные по отношению к (4.89) – (4.92) модели многосигнальных радиолокационных измерителей совместного оценивания дальности и угловых координат (дальности, угловых координат и частоты) нескольких точечных источников сигналов:

$$U = (Q \tilde{\ominus} S^R)(A \otimes 1_R); \quad (4.104)$$

$$U = (Q \tilde{\ominus} (S^R \tilde{\ominus} F^R))(A \otimes 1_R); \quad (4.105)$$

$$U = (\tilde{Q} \tilde{\otimes} \tilde{S}^R)(A \otimes 1_R); \quad (4.106)$$

$$U = (\tilde{Q} \tilde{\otimes} (\tilde{S}^R \tilde{\otimes} \tilde{F}^R))(A \otimes 1_R). \quad (4.107)$$

Здесь матрицы  $Q$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $1_R$  и вектор  $A$  сохранили свой прежний смысл,  $S^R$ ,  $\tilde{S}^R$ ,  $F^R$ ,  $\tilde{F}^R$  – подвергнутые ротации (ротированные) блок–матрицы  $S$ ,  $\tilde{S}$ ,  $F$ ,  $\tilde{F}$ , трактуемые подобно соотношениям (4.89) – (4.92), причем

$$S^R = [S_1^R \quad S_2^R \quad \dots \quad S_M^R], \quad F^R = [F_1^R \quad F_2^R \quad \dots \quad F_M^R],$$

$$S_m^R = \begin{bmatrix} S_{111}(z_m) & \dots & S_{1R1}(z_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ S_{R11}(z_m) & \dots & S_{RR1}(z_m) \\ \hline S_{11G}(z_m) & \dots & S_{1RG}(z_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ S_{R1G}(z_m) & \dots & S_{RRG}(z_m) \end{bmatrix}; \quad F_m^R = \begin{bmatrix} F_{111}(\omega_m) & \dots & F_{1R1}(\omega_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F_{R11}(\omega_m) & \dots & F_{RR1}(\omega_m) \\ \hline F_{11N}(\omega_m) & \dots & F_{1RN}(\omega_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F_{R1N}(\omega_m) & \dots & F_{RRN}(\omega_m) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{S}^R = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}^R & \tilde{S}_{12}^R & \dots & \tilde{S}_{1M}^R \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{S}_{P1}^R & \tilde{S}_{P2}^R & \dots & \tilde{S}_{PM}^R \end{bmatrix}; \quad \tilde{F}^R = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11}^R & \tilde{F}_{12}^R & \dots & \tilde{F}_{1M}^R \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{F}_{P1}^R & \tilde{F}_{P2}^R & \dots & \tilde{F}_{PM}^R \end{bmatrix};$$

$$\tilde{S}_{pm}^R = \begin{bmatrix} S_{11p1}(z_m) & \dots & S_{1Rp1}(z_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ S_{R1p1}(z_m) & \dots & S_{RRp1}(z_m) \\ \hline S_{11pG}(z_m) & \dots & S_{1RpG}(z_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ S_{R1pG}(z_m) & \dots & S_{RRpG}(z_m) \end{bmatrix}; \quad \tilde{F}_{pm}^R = \begin{bmatrix} F_{11p1}(\omega_m) & \dots & F_{1Rp1}(\omega_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F_{R1p1}(\omega_m) & \dots & F_{RRp1}(\omega_m) \\ \hline F_{11pN}(\omega_m) & \dots & F_{1RpN}(\omega_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F_{R1pN}(\omega_m) & \dots & F_{RRpN}(\omega_m) \end{bmatrix}.$$

С учетом (4.93), (4.94) в развернутом виде выражения (4.104) – (4.107) могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned}
 U &= (Q \tilde{\square} S^R)(A \otimes 1_R) = \left( [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_M] \tilde{\square} \right. \\
 &\quad \left. \tilde{\square} [S_1^R \quad S_2^R \quad \dots \quad S_M^R] \right) \cdot (A \otimes 1_R) = \\
 &= [Q_1 \tilde{\square} S_1^R \quad Q_2 \tilde{\square} S_2^R \quad \dots \quad Q_M \tilde{\square} S_M^R] \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix} = \\
 &= [Q_1 \square S_1^R \quad Q_2 \square S_2^R \quad \dots \quad Q_M \square S_M^R] \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix}; \\
 U &= (Q \tilde{\square} (S^R \tilde{\square} F^R))(A \otimes 1_R) = \\
 &= \left( [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_M] \tilde{\square} [S_1^R \quad S_2^R \quad \dots \quad S_M^R] \tilde{\square} \right. \\
 &\quad \left. \tilde{\square} [F_1^R \quad F_2^R \quad \dots \quad F_M^R] \right) (A \otimes 1_R) = \\
 &= [Q_1 \tilde{\square} (S_1^R \tilde{\square} F_1^R) \quad Q_2 \tilde{\square} (S_2^R \tilde{\square} F_2^R) \quad \dots \quad Q_M \tilde{\square} (S_M^R \tilde{\square} F_M^R)] \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix} = \\
 &= [Q_1 \square (S_1^R \tilde{\square} F_1^R) \quad Q_2 \square (S_2^R \tilde{\square} F_2^R) \quad \dots \quad Q_M \square (S_M^R \tilde{\square} F_M^R)] \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix}; \tag{4.109}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= (\tilde{Q} \tilde{\square} \tilde{S}^R)(A \otimes 1_R) = \\
&= \left( \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{P1} & Q_{P2} & \cdots & Q_{PM} \end{bmatrix} \tilde{\square} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}^R & \tilde{S}_{12}^R & \cdots & \tilde{S}_{1M}^R \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{S}_{P1}^R & \tilde{S}_{P2}^R & \cdots & \tilde{S}_{PM}^R \end{bmatrix} \right) \cdot (A \otimes 1_R) = \\
&= \begin{bmatrix} Q_{11} \tilde{\square} \tilde{S}_{11}^R & Q_{12} \tilde{\square} \tilde{S}_{12}^R & \cdots & Q_{1M} \tilde{\square} \tilde{S}_{1M}^R \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{P1} \tilde{\square} \tilde{S}_{P1}^R & Q_{P2} \tilde{\square} \tilde{S}_{P2}^R & \cdots & Q_{PM} \tilde{\square} \tilde{S}_{PM}^R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} Q_{11} \square \tilde{S}_{11}^R & Q_{12} \square \tilde{S}_{12}^R & \cdots & Q_{1M} \square \tilde{S}_{1M}^R \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{P1} \square \tilde{S}_{P1}^R & Q_{P2} \square \tilde{S}_{P2}^R & \cdots & Q_{PM} \square \tilde{S}_{PM}^R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix}; \quad (4.110)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= (\tilde{Q} \tilde{\square} (\tilde{S}^R \tilde{\square} \tilde{F}^R))(A \otimes 1_R) = \\
&= \left( \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{P1} & Q_{P2} & \cdots & Q_{PM} \end{bmatrix} \tilde{\square} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}^R & \tilde{S}_{12}^R & \cdots & \tilde{S}_{1M}^R \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{S}_{P1}^R & \tilde{S}_{P2}^R & \cdots & \tilde{S}_{PM}^R \end{bmatrix} \tilde{\square} \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11}^R & \tilde{F}_{12}^R & \cdots & \tilde{F}_{1M}^R \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{F}_{P1}^R & \tilde{F}_{P2}^R & \cdots & \tilde{F}_{PM}^R \end{bmatrix} \right) (A \otimes 1_R) = \\
&= \begin{bmatrix} Q_{11} \tilde{\square} (\tilde{S}_{11}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{11}^R) & Q_{12} \tilde{\square} (\tilde{S}_{12}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{12}^R) & \cdots & Q_{1M} \tilde{\square} (\tilde{S}_{1M}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{1M}^R) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{P1} \tilde{\square} (\tilde{S}_{P1}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{P1}^R) & Q_{P2} \tilde{\square} (\tilde{S}_{P2}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{P2}^R) & \cdots & Q_{PM} \tilde{\square} (\tilde{S}_{PM}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{PM}^R) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} Q_{11} \square (\tilde{S}_{11}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{11}^R) & Q_{12} \square (\tilde{S}_{12}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{12}^R) & \cdots & Q_{1M} \square (\tilde{S}_{1M}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{1M}^R) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{P1} \square (\tilde{S}_{P1}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{P1}^R) & Q_{P2} \square (\tilde{S}_{P2}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{P2}^R) & \cdots & Q_{PM} \square (\tilde{S}_{PM}^R \tilde{\square} \tilde{F}_{PM}^R) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot 1_R \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot 1_R \end{bmatrix}. \quad (4.111)
\end{aligned}$$

Примечательно, что во всех соотношениях (4.108) – (4.111) присутствует одинаковый амплитудный множитель  $A \otimes 1_R$ , который имеет место и в модели (4.76), базирующейся на блочном кронекеровском произведении. Данное обстоятельство создает благоприятные предпосылки для унификации процессов анализа точности и синтеза измерительных процедур применительно к столь различным методам формализации модели РЛС с ЦАР.

Дальнейшее сокращение размерности амплитудного множителя, сводящееся к записи его исключительно через вектор (матрицу) амплитуд, состоит в использовании процедуры **блочной векторизации**, которая в отличие от известного вес-оператора [11] действует не в масштабе всей матрицы, а поблочно.

**Определение. Операцией блочной векторизации** блочной  $dr \times sc$ - матрицы  $A$  называется ее поблочное преобразование с помощью вес-оператора, то есть

$$\overline{\text{vec}}_{pc} A = \overline{\text{vec}}_{pc} [A_{ds}] = \left[ \text{vec} \left[ a_{pc} \right] \right]_{ds}. \quad (4.112)$$

Двойной индекс "pc" у оператора  $\overline{\text{vec}}_{pc}$  определяет размеры блоков, подвергаемых действию вес-оператора, причем формирование таковых осуществляется, начиная с левого верхнего угла преобразуемой матрицы, с учетом того, что индекс "p" обозначает количество строк, а "c" – количество столбцов в блоке.

Пример 14.  $\overline{\text{vec}}_{pc} A = \left[ \begin{array}{c|c} \text{vec} A_{11} & \text{vec} A_{12} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \text{vec} A_{r1} & \text{vec} A_{r2} \end{array} \right].$

Применяя процедуру (4.112), можно получить из (4.108) – (4.111) следующие аналитические записи напряжений импульсных сигналов в 3- и 4-координатной РЛС с ЦАР:

$$U = \left[ \overline{\text{vec}}_{pc} \left( Q \tilde{\Theta} S^R \right) \right] A; \quad (4.113)$$

$$U = \left[ \overline{\text{vec}}_{pc} \left( Q \tilde{\Theta} \left( S^R \tilde{\Theta} F^R \right) \right) \right] A ; \quad (4.114)$$

$$U = \left[ \overline{\text{vec}}_{pc} \left( \tilde{Q} \tilde{\Theta} \tilde{S}^R \right) \right] A ; \quad (4.115)$$

$$U = \left[ \overline{\text{vec}}_{pc} \left( \tilde{Q} \tilde{\Theta} \left( \tilde{S}^R \tilde{\Theta} \tilde{F}^R \right) \right) \right] A . \quad (4.116)$$

Аналогично может быть введена и блочная операция  $\overline{\text{invec}}_M$ , обратная к рассмотренной ранее  $\text{invec}_M$  и сводящаяся к ее столбцовому выполнению, причем индекс  $M$  по-прежнему соответствует количеству элементов в столбце результирующей блочной матрицы. Актуальность рассмотрения  $\overline{\text{invec}}_M$ , подобно оператору  $\text{invec}_M$ , обусловлена необходимостью реализации для моделей (4.113) – (4.116) процедур пересчета оценок первичного разрешения источников сигналов в значения их других координат. Кроме того,  $\overline{\text{invec}}_M$  выполняет основную роль в преобразовании результатов дифференцирования по Нойдеккеру

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} \otimes (\text{vec } Y) \quad (4.117)$$

в матричную производную, определяемую в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} \otimes Y . \quad (4.118)$$

При этом имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} \otimes Y = \overline{\text{invec}}_M \left( \frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} \otimes (\text{vec } Y) \right) . \quad (4.119)$$

Как известно [11], в настоящее время при толковании матричной производной имеют место две крайности: либо для формиро-

вания производной применяются только операторы вес, как для аргумента, по которому ведется дифференцирование, так и для самой функции, либо оператор вес не используется вовсе. Производная же (4.118) представляет собой как бы компромиссную середину в этом ряду, и для ее введения в принципе достаточно было бы руководствоваться соображениями диалектического подхода. Однако в данном случае не рассматривавшаяся в [11] производная (4.118) призвана обеспечить упрощение дифференцирования кронекеровских произведений, фигурирующих в моделях (4.113) – (4.116) в виде амплитудных множителей. Их особенностью является то, что лишь одна матрица дифференцируемого выражения функционально зависима от аргумента дифференцирования, остальные же сомножители суть константы. В частности, для амплитудных множителей (4.104) – (4.107) производные в смысле (4.117) имеют вид:

$$\frac{\partial(A \otimes 1_R)}{\partial A} = \frac{\partial A}{\partial A} \otimes 1_R = 1_M \otimes 1_R; \quad (4.120)$$

$$\frac{\partial(A \otimes 1_R \otimes 1_T \otimes 1_G)}{\partial A} = \frac{\partial A}{\partial A} \otimes 1_R \otimes 1_T \otimes 1_G = 1_M \otimes 1_R \otimes 1_T \otimes 1_G, \quad (4.121)$$

где  $A$  –  $M$ –вектор амплитуд.

Выражения производных (4.120), (4.121) могут быть полезны при вычислении нижней границы Крамера-Рао для оценки потенциально достижимой точности радиолокационных систем, представленных моделями (4.104) – (4.107). При этом производная Нойдеккера дает крайне громоздкий и неподдающийся нетренированному восприятию результат. В частности, для  $M$ –вектора  $A$  справедливо тождество

$$\frac{\partial(A \otimes 1_R)}{\partial A} = \frac{\partial \text{vec}(A \otimes 1_R)}{\partial \text{vec}^T A} = (1_{M,R} \otimes 1_R)(1_M \otimes \text{vec} 1_R). \quad (4.122)$$

Здесь  $1_{M,R}$  обозначает матрицу перестановок, в которой, согласно [11], в  $i,j$ -м  $M \times R$ -блоке  $j,i$ -й элемент равен единице, а остальные – нулевые, например,

$$1_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В связи с рассмотрением новой производной следует указать и на своевременность введения процедуры блочной векторизации. С помощью оператора  $\overline{\text{vec}}_{pc}$ , как оказалось, осуществляется обратный переход от производной (4.118) к производной Нойдеккера

$$\frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} \otimes (\text{vec } Y) = \overline{\text{vec}}_{pc} \left( \frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} \otimes Y \right). \quad (4.123)$$

Здесь индекс оператора  $\overline{\text{vec}}_{pc}$  соответствует размерности матрицы  $Y$ .

Производной (4.118) в принципе можно противопоставить и альтернативные варианты компоновки. В частности, при первом из них блоки частных производных записываются не в строку, а в столбец

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} \otimes Y = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes Y \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_M} \otimes Y \end{bmatrix}. \quad (4.124)$$

Примечательно, что последнее выражение легко приводится к определению (4.118) с помощью введенной выше операции блочной ротации

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes Y \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_M} \otimes Y \end{array} \right]^R = \left[ \begin{array}{c|c|c} \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes Y & & \\ & \dots & \\ & & \frac{\partial}{\partial x_M} \otimes Y \end{array} \right]. \quad (4.125)$$

Учитывая эту возможность, имеет смысл ограничиться первоначальным определением (4.118), поскольку полученные в соответствии с ним результаты достаточно просто, путем блочной ротации, преобразуются в альтернативные. Тем более, что трактовка (4.124) не приводит к столь красивым результатам как (4.118). Другие определения, а именно

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = Y \otimes \frac{\partial}{\partial (\text{vec } X)^T}, \quad (4.126)$$

в строчном либо столбцовом представлении и вовсе следует отбросить, поскольку своим методом упорядочивания они вносят изрядный хаос в результат дифференцирования.

Справедливости ради следует отметить, что процедура обычного векторного преобразования *vec* позволяет в принципе получить аналитическую модель РЛС с ЦАР любой сложности, в том числе и при многосигнальных многокоординатных измерениях. Вместе с тем, векторизованная форма представления отличается изрядной громоздкостью и, что более существенно, лишена наглядности, присущей альтернативным моделям (4.104) – (4.107). В частности, с помощью (4.107) в многопозиционном случае можно весьма доступно отобразить нюансы геометрии конформных антенных решеток, если они уникальны в каждой позиции. При этом, используя аппарат вырезанных матриц, становится возможным передать в матричных записях особенности конфи-

гурации плоских четырехгранных, ромбовидных и т. п. решеток произвольной топологии. В результате при сопоставительном анализе точностных свойств различных радиолокационных систем, наглядно видно, о сравнении каких решеток идет речь. Использование же вес-операторов делает эту разницу трудно уловимой.

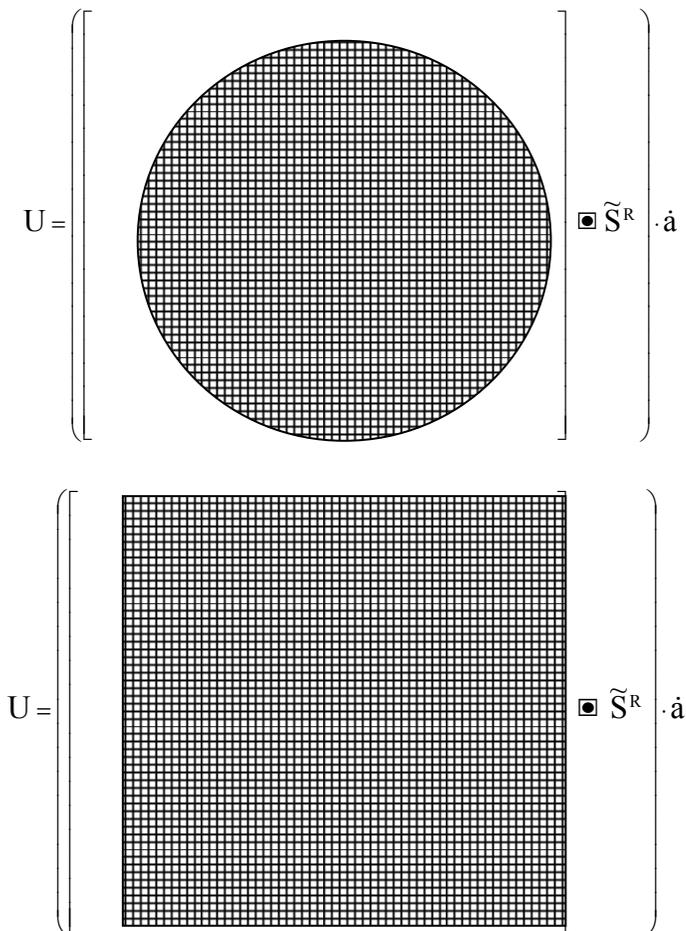


Рис. 4.3. Математические модели круглой и прямоугольной ЦАР

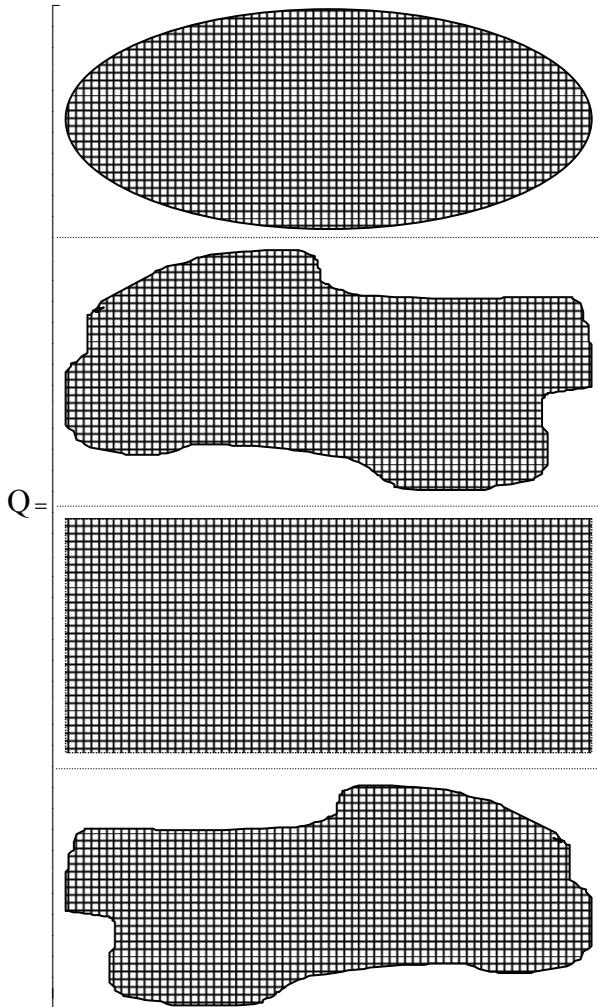


Рис. 4.4. Блочная матрица характеристик направленности для 4-позиционной системы РЛС с ЦАР неидентичной топологии (пример)

В подтверждение сказанного можно сослаться, к примеру, на рис. 4.3, где с помощью вырезанных матриц  $Q$  сопоставлены ма-

тематические модели откликов круглой и прямоугольной ЦАР на сигнал одиночного точечного источника. При этом предполагается, что блоки матрицы  $S^R$  имеют тот же формат, что и в  $Q$ .

В многопозиционном случае в рамках модели, базирующейся на семействе обобщенных торцевых произведений, вообще отчетливо можно передать особенности конфигурации ЦАР в каждой позиции. Например, используя все те же вырезанные матрицы, для 4-позиционной радиолокационной системы с РЛС на базе плоских ЦАР, которой соответствует модель (4.107), матрицу  $Q$  можно представить в блочном виде, приведенном на рис. 4.4.

Предложенный подход позволяет исследовать достаточно интересный и ранее не поднимавшийся вопрос влияния на точность пеленгации межпозиционных неидентичностей конфигурации (топологии) ЦАР либо ее отдельных секций, вносимых как преднамеренно, так и в результате отказа части приемных каналов. Применительно к проблемам дальнометрии это направление, как будет показано далее, важно с точки зрения возможности повышения точности оценивания дальности путем использования процедур пересчета результатов угловой пеленгации.

Таким образом, при необходимости проведения прецизионных измерений в случае неидентичных приемных каналов ЦАР предпочтительнее использовать в качестве основной модель радиолокационной системы, формализованную на основе обобщенных торцевых произведений. Конкретный механизм применения такой модели может существенно различаться в зависимости от решаемой задачи. Однако в большинстве случаев следует принять во внимание, что для рассмотренных вариантов обобщенного торцевого произведения не применимы свойства, характерные для семейства торцевых операций, позволившие, например, факторизовать производную Нойдеккера. По этой причине во всех выкладках, видимо, характерным должен стать переход от исходной модели к ее эквивалентным записям, получаемым на основе процедуры блочной векторизации  $\text{vec}_{pc}$ . Такая перекомпо-

новка исходной матричной записи, как раз, и рассматривалась в выражениях (4.113) – (4.116).

Имея столь мощный матричный аппарат, исследователям далее достаточно лишь определиться в своих предпочтениях, оставив выбор на наиболее удобном для них варианте формализации матричной модели отклика ЦАР из числа уже рассмотренных. При этом открываются возможности проведения по единой схеме последующего анализа потенциальных свойств той или иной радиолокационной системы либо синтеза соответствующих ее конкретной структуре методов измерения координат, в том числе в режиме совместного оценивания таковых для многосигнальной ситуации.

Представленные здесь примеры лишь поверхностно иллюстрируют возможности предложенных типов матричных операций. С их помощью автору удалось получить нижние границы Крамера-Рао для оценки потенциальных точностей многосигнальной пеленгации, спектральной селекции и импульсной дальнометрии, составить ряд аналитических моделей конформных цифровых антенных решеток и синтезировать соответствующие им методы сверхрелеевого разрешения точечных источников. Продвижение в указанных областях во многом сдерживалось из-за несовершенства традиционной матричной алгебры.

В теории радиолокации и системном анализе в целом имеют место и другие проблемы, решению которых может способствовать предложенный подход.

*Использование торцевых произведений матриц  
в задачах совместного оценивания нескольких координат целей  
и подавления помех в однопозиционных РЛС*

Изложенная выше теория торцевых произведений матриц позволяет синтезировать оптимальные процедуры сверхрелеевого разрешения множества источников радиолокационных сигналов путем оценивания их параметров на основе совместного решения

относительно искомым неизвестных системы уравнений, составленной по отсчетам напряжений.

Используя теорию торцевых произведений матриц, в рамках такого подхода становится возможным достаточно просто обобщать любые однопараметрические методы измерения (известные и пока неизвестные) на многомерный случай. Для этого достаточно использовать подстановку многомерных эквивалентов матриц характеристик, выраженных через торцевые произведения, в соответствующие матричные записи однопараметрических методов оценивания.

Иллюстрируя сказанное, уместно продемонстрировать вариант обобщения на случай 4-координатной ЦАР метода оценивания одного параметра  $M$  источников сигналов по максимуму функции правдоподобия. При этом за основу примем выкладки [80], многокоординатный вариант интерпретации которых в отношении минимизируемого функционала будет следующим:

$$L = \{U - P A\}^* \{U - P A\} = \min, \quad (4.127)$$

где  $P = Q \cdot V \cdot F \cdot S$  – для селекции по всем четырем координатам ( $S$  – матрица откликов  $M$  сигналов в  $S$  строках дальности, сформированных путем дополнительного стробирования отсчетов АЦП) или  $P = Q$  – при пеленгации только в одной из угломерных плоскостей.

Собственно измерительная процедура в 4-координатной трактовке сводится к максимизации выражения

$$L = \text{tr} [G \cdot R], \quad (4.128)$$

где  $G = P \cdot [P^* \cdot P]^{-1} \cdot P^*$ ;  $R = U \cdot U^*$ ;  $P = Q \cdot V \cdot F \cdot S$ .

Нетрудно заметить, что использование аппарата торцевых произведений позволяет упростить вычислительный процесс за счет замены обращения многомерного произведения матриц  $(P^* P)^{-1}$  на тождественную процедуру для более просто формируемых адамаровых произведений

$$(Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S)^*(Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) = (Q^* \cdot Q) \circ (V^* \cdot V) \circ (F^* \cdot F) \circ (S^* \cdot S). \quad (4.129)$$

Экономия в вычислительных затратах при формировании квадратичной формы  $P^*P$  в виде произведений Адамара не зависит от количества источников  $M$  и для  $(R \times N \times T \times G) \times M$ -матрицы  $P$  (4-координатный случай) сводится к сокращению в  $RNTG/(R+N+T+G+3)$  раз количества операций умножения и в  $(RNTG-1)/(R+N+T+G-4)$  раз – операций сложения. Для антенной решетки, содержащей  $32 \times 32$  элемента, в каждом канале которой синтезируется 32 частотных фильтра в 32 строках дальности ( $R=N=T=G=32$ ), указанный выигрыш сопровождается уменьшением количества операций умножения по отношению к исходной записи  $(Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S)^*(Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S)$  в 8004 раза, а сложений – в 8456 раз. При этом не учитываются вычислительные затраты на формирование самой  $(R \times N \times T \times G) \times M$ -матрицы. В случае же учета таковых формальная разница в объеме операций существенно возрастает. По сравнению с 4-координатной моделью (4.7), основанной на обычном произведении матриц, сокращение количества операций умножения при этом превышает 268,845 миллиардов раз.

Соотношение (4.129) является теоретической основой для раздельного измерения координат в РЛС с факторизуемыми диаграммами направленности ЦАР и распараллеливания процесса максимизации (4.128) на независимые итерационные процедуры в каждой из составляющих координатного базиса. Факторизация  $P^* \cdot P$  через адамаровы произведения позволяет контролировать невырожденность (4.129) и в случае таковой переходить к решению измерительной задачи для меньшего количества координат, исключая из рассмотрения тот сигнальный параметр, для которого условие невырожденности нарушается (например, при недостаточном количестве каналов). В основе такого утверждения лежит известный из теории матриц факт [11], что при невырожден-

ности матриц  $A$  и  $B$  матрица  $A \circ B$  также не вырождена. Манипуляция же нефакторизованной матрицей  $P$  не позволяет осуществлять указанную адаптацию и делает невозможным совместное оценивание в оговоренных случаях.

Положительная определенность сомножителей в правой части (4.129) при их невырожденности создает предпосылки для упрощения итерационного процесса (4.128) путем сведения таковых к виду  $J = L \cdot L^*$ , где  $L$  – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами [11]. В порядке предостережения следует отметить, что строгая замена процедуры (4.128) квазиоптимальным алгоритмом совместного оценивания, в котором бы, например, вместо соотношения  $[(Q^* \cdot Q) \circ (V^* \cdot V)]^{-1}$  использовалось выражение  $(Q^* \cdot Q)^{-1} \circ (V^* \cdot V)^{-1}$ , возможна только в односигнальном случае, когда сомножители адамарового произведения являются скалярными величинами. Теоретической предпосылкой такому ограничению является положительная полуопределенность матричной разности  $A^{-1} \circ B^{-1} - [A \circ B]^{-1}$  [11], из которой, к примеру, следует лишь справедливость неравенств  $\det(A^{-1} \circ B^{-1}) \geq \det([A \circ B]^{-1})$  и  $\text{tr}(A^{-1} \circ B^{-1}) \geq \text{tr}([A \circ B]^{-1})$ , тогда как тождество  $A^{-1} \circ B^{-1} = [A \circ B]^{-1}$  в общем случае не выполняется. Как вариант можно предположить допустимость использования такой замены только в интересах грубой оценки координат источников, тем более, что, как показали результаты предварительного моделирования, при больших рассогласованиях истинных значений координат и их оценок указанный прием дает эффект, схожий с процедурой (4.128). Вопросы же оценки границ применимости такого упрощения итерационных процедур, равно как и оправданности его в конкретных измерительных задачах остаются открытыми.

Изменяя представление матрицы  $P$ , не составляет труда получить аналогичные (4.128) методы оценивания и для многопози-

ционных многокоординатных РЛС с идентичными каналами ЦАР. При этом для 4-х координат

$$P = Q \ominus V \ominus F \ominus S. \quad (4.130)$$

Как и в случае торцевых произведений матриц, использование блочных операций, в силу тождества (4.53), может привести к заметному сокращению объема вычислений при формировании квадратичной формы  $P^* \cdot P$ . Применительно к К-блочному представлению (4.130), тождество (4.53) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} & ([Q_k]^T \ominus [V_k]^T \ominus [F_k]^T \ominus [S_k]^T) ([Q_k] \ominus [V_k] \ominus [F_k] \ominus [S_k]) = \\ & = \sum_k \{ (Q_k^T \cdot Q_k) \circ (V_k^T \cdot V_k) \circ (F_k^T \cdot F_k) \circ (S_k^T \cdot S_k) \}. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Отсюда несложно установить, что экономия в операциях умножения при формировании квадратичной формы  $P^* \cdot P$  в виде суммы произведений Адамара не зависит от количества источников  $M$  и блоков  $K$ . Для  $(K \times R \times N \times T \times G) \times M$ -матрицы  $P$  (4-координатный случай) сокращение количества умножений составляет ту же величину, что и в рассмотренном выше примере (4.129), то есть,  $RNTG/(R+N+T+G+3)$  раз. Выигрыш же в операциях сложения, напротив, чувствителен к количеству блоков  $K$ , и определяется в разгах величиной  $(KRNTG - 1) / (K[R+N+T+G-4] + K - 1)$ . Для 4-позиционной радиолокационной системы с 5-гранными антенными решетками в виде усеченных пирамид, каждая секция которых содержит  $32 \times 32$  элемента, при синтезе 32 частотных фильтров в 32 строках дальности ( $R=N=T=G=32$ ) указанный выигрыш сопровождается уменьшением количества операций сложения по отношению к неадамаровской трактовке квадратичной формы почти в 8392 раза. Характерно, что это меньше полученных для (4.129) 8456 раз, причем

перевес моноблочной модели над К-блочной в отношении экономики сложений сохраняется при любых значениях К, R N T и G, больших 1.

В качестве следующего примера рассмотрим решение дальномерной задачи с помощью многочастотных импульсных сигналов. Опираясь на метод максимального правдоподобия, в случае M источников блок-вектор из G комплексных отсчетов напряжений сигнальной смеси на R частотах можно записать через ТБТП

$$U = (Z \odot F)A, \quad (4.132)$$

где Z – блок-вектор огибающих M импульсов (одинаковых для всех R частот), g-й блок которого соответствует g-му временному отсчету ( $s_g$ ) и в ситуации присутствия всех M сигналов в каждом отсчете имеет вид  $Z_g = [Z_g(b_1) Z_g(b_2) \dots Z_g(b_M)]$ ;  $b_m$  – неизвестное время прихода сигнала m -го источника; F – блок-вектор комплексных экспонент, g-й блок которого

$$F_g = \begin{bmatrix} \exp(j\omega_1 \Delta t [s_g - b_1]) & \exp(j\omega_1 \Delta t [s_g - b_2]) & \dots & \exp(j\omega_1 \Delta t [s_g - b_M]) \\ \exp(j\omega_2 \Delta t [s_g - b_1]) & \exp(j\omega_2 \Delta t [s_g - b_2]) & \dots & \exp(j\omega_2 \Delta t [s_g - b_M]) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \exp(j\omega_R \Delta t [s_g - b_1]) & \exp(j\omega_R \Delta t [s_g - b_2]) & \dots & \exp(j\omega_R \Delta t [s_g - b_M]) \end{bmatrix}; \quad (4.133)$$

$\omega_m$  – радиальная частота заполнения m-го радиоимпульса; A – вектор комплексных амплитуд сигналов.

Рассматривая матрицу  $P = Z \odot F$  как функцию векторного аргумента, образованного неизвестными временами прихода сигналов, в рамках метода максимального правдоподобия можно свести задачу измерения дальности, например, к поиску максимума выражения

$$L = \text{tr} [P \cdot [P^* \cdot P]^{-1} \cdot P^* \cdot U \cdot U^*]. \quad (4.134)$$

Применение ТБТП позволяет также решить задачу совместного оценивания дальности и угловой координаты при формировании многочастотных сигналов непосредственно в приемнике. Например, для  $K$ -элементной линейной ЦАР в случае  $M$  источников блок-вектор из  $G$  временных отсчетов напряжений сигнальной смеси на  $R$  частотах можно записать в виде произведения (4.132), рассматривая  $Z$  как блок-вектор огибающих  $M$  импульсов (одинаковых для всех  $R$  частот одного приемного канала) по выходу  $K$  цифровых приемников,  $g$ -й блок которого соответствует  $g$ -му временному отсчету и в ситуации присутствия всех  $M$  сигналов в каждом отсчете имеет вид

$$Z_g = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{1g}(b_1) & \dot{Z}_{1g}(b_2) & \cdots & \dot{Z}_{1g}(b_M) \\ \dot{Z}_{2g}(b_1) & \dot{Z}_{2g}(b_2) & \cdots & \dot{Z}_{2g}(b_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Z}_{Kg}(b_1) & \dot{Z}_{Kg}(b_2) & \cdots & \dot{Z}_{Kg}(b_M) \end{bmatrix},$$

где  $\dot{Z}_{kg}(b_m) = Z_{kg}(b_m) \exp\left(j \frac{2\pi dk}{\lambda} \sin\theta_m\right)$ .

Аргумент экспоненты в элементах  $g$ -го блока  $\dot{Z}_{kg}(b_m)$  учитывает межканальные фазовые сдвиги радиосигналов, зависящие от пеленгов их источников  $\theta_m$  относительно нормали к решетке, а модуль – межканальные различия в огибающих, вызванные неидентичностью АЧХ приемных каналов ЦАР и неодновременностью прихода сигналов на антенные элементы. При этом блок-вектор комплексных экспонент  $F$  имеет блоки, идентичные (4.133).

Аналогично, может быть представлена модель пачечного сигнала по выходу вращающейся линейной ЦАР с  $K$  ненаправленными антенными элементами. В этом случае для пакета из  $T$  видеоимпульсов имеет смысл учесть смещение эхосигналов вдоль временной оси, вызванное движением источника за период их

повторения, а также изменение угловых координат целей, обусловленное вращением полотна ЦАР. При идентичных приемных каналах, в пренебрежении апертурным временем распространения сигналов вдоль полотна решетки, можно полагать, что межканальные отличия в огибающих сигналов отсутствуют. В результате, при произвольной эволюции положения видеоимпульсов, когда сдвиг таковых во времени претерпевает неизвестное межпериодное приращение  $\Delta_{m_t}$ ,  $t$ -й блок блок-вектора  $Z$  из  $G$  отсчетов  $M$  огибающих можно выразить в виде

$$Z_t = \begin{bmatrix} \dot{Z}(\Delta_{1t} + b_1) & \dot{Z}(\Delta_{2t} + b_2) & \dots & \dot{Z}(\Delta_{Mt} + b_M) \\ \dot{Z}(\Delta_{1t} + b_1 + 1) & \dot{Z}(\Delta_{2t} + b_2 + 1) & \dots & \dot{Z}(\Delta_{Mt} + b_M + 1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dot{Z}(\Delta_{1t} + b_1 + G - 1) & \dot{Z}(\Delta_{2t} + b_2 + G - 1) & \dots & \dot{Z}(\Delta_{Mt} + b_M + G - 1) \end{bmatrix}. \quad (4.135)$$

Блок-вектор экспонент  $F$  в случае изменения угловых координат всех целей, вызванного только лишь вращением полотна за время приема пачки, можно выразить в виде совокупности  $T$  блоков

$$F_t = \begin{bmatrix} e^{2j\frac{\pi d}{\lambda}\sin[\theta_1 + \delta_t]} & e^{2j\frac{\pi d}{\lambda}\sin[\theta_2 + \delta_t]} & \dots & e^{2j\frac{\pi d}{\lambda}\sin[\theta_M + \delta_t]} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{2(K-1)j\frac{\pi d}{\lambda}\sin[\theta_1 + \delta_t]} & e^{2(K-1)j\frac{\pi d}{\lambda}\sin[\theta_2 + \delta_t]} & \dots & e^{2(K-1)j\frac{\pi d}{\lambda}\sin[\theta_M + \delta_t]} \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

При этом полагается, что за время приема импульса угловые координаты источников остаются неизменными.

Подставив (4.135) и (4.136) в (4.132), получим систему из  $KGT$  уравнений с  $(T-1)(M+1)+4M$  неизвестными (межпериодные приращения угловых координат и временные сдвиги  $M$  сигналов, их времена и направления прихода, а также квадратурные составляющие амплитуд). Следовательно, для решения измерительной задачи максимизацией (4.134) необходимо выполнить условие

$$KGT > (T - 1)(M+1)+4M.$$

Для многокоординатных РЛС с неидентичными каналами, аналитическая модель которых представлена в (4.85), задача совместного оценивания параметров сигнала одиночного источника решается подстановкой в (4.128) выражения

$$P = Q \otimes \{S \tilde{\otimes} F\} = Q \otimes [S_1 \otimes F \mid S_2 \otimes F \mid \dots \mid S_T \otimes F], \quad (4.137)$$

В свою очередь, для многосигнальных моделей (4.104), (4.105) это могут быть величины

$$P = (Q \tilde{\otimes} S^R) = [Q_1 \tilde{\otimes} S_1^R \quad Q_2 \tilde{\otimes} S_2^R \quad \dots \quad Q_M \tilde{\otimes} S_M^R], \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} P &= Q \tilde{\otimes} (S^R \tilde{\otimes} F^R) = \\ &= [Q_1 \otimes (S_1^R \tilde{\otimes} F_1^R) \quad Q_2 \otimes (S_2^R \tilde{\otimes} F_2^R) \quad \dots \quad Q_M \otimes (S_M^R \tilde{\otimes} F_M^R)]. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Точно так же следует действовать и в отношении многопозиционных многокоординатных систем на базе РЛС с ЦАР, имеющих неидентичные каналы. Например, в односигнальном случае для (4.86) целесообразно применить

$$P = \tilde{Q} \tilde{\otimes} \{\tilde{S} \tilde{\otimes} \tilde{F}\}, \quad (4.140)$$

а в многосигнальных режимах, касательно (4.106), (4.107),

$$P = \tilde{Q} \tilde{\otimes} \tilde{S}^R = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & \dots & Q_{M1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_{1P} & Q_{2P} & \dots & Q_{MP} \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}^R & \tilde{S}_{21}^R & \dots & \tilde{S}_{M1}^R \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{S}_{1P}^R & \tilde{S}_{2P}^R & \dots & \tilde{S}_{MP}^R \end{bmatrix}; \quad (4.141)$$

$$P = \tilde{Q} \tilde{\otimes} (\tilde{S}^R \tilde{\otimes} \tilde{F}^R) =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{11} \square (\tilde{S}_{11}^R \tilde{F}_{11}^R) & Q_{21} \square (\tilde{S}_{21}^R \tilde{F}_{21}^R) & \dots & Q_{M1} \square (\tilde{S}_{M1}^R \tilde{F}_{M1}^R) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_{1P} \square (\tilde{S}_{1P}^R \tilde{F}_{1P}^R) & Q_{2P} \square (\tilde{S}_{2P}^R \tilde{F}_{2P}^R) & \dots & Q_{MP} \square (\tilde{S}_{MP}^R \tilde{F}_{MP}^R) \end{bmatrix}. \quad (4.142)$$

Перечень подобных примеров может быть продолжен. Рассмотренные варианты решения задач совместного оценивания нескольких координат легко обобщаются и на другие методы однокоординатных измерений.

Аналогичным образом адаптируются, например, для нужд дальнометрии известные в спектральном оценивании методы свёрхрелеевского разрешения IMP (**I**ncr**e**mental **M**ulti-**P**arameter) и DOSE (**D**irection **O**f arrival by **S**ignal **E**limination) [80]. Возможны также более сложные матричные обобщения многочастотной обработки на случай совместного оценивания нескольких параметров сигналов, в том числе пачечных.

По своей сложности такой класс измерительных процедур превосходит традиционные для теории радиолокации методы оценивания координат целей, особенно, если попутно требуется решить задачу учета взаимного влияния приемных каналов. В отношении последнего фактора следует отметить, что до недавнего времени его роль в достижении потенциальных возможностей РЛС с ЦАР явно недооценивалась отечественными специалистами. По этой причине работы автора по данному вопросу носят выраженный приоритетный характер.

Свидетельством же эффективности принятия специальных мер по учету взаимного влияния антенных элементов может служить рис. 4.5, цитируемый здесь в оригинале из [75]. На нем представлены результаты применения процедуры MUSIC для пеленгации двух источников 7-элементной ЦАР: в случае пренебрежения взаимным влиянием (mutual coupling) – пунктирная линия, и с компенсацией такового – сплошная.

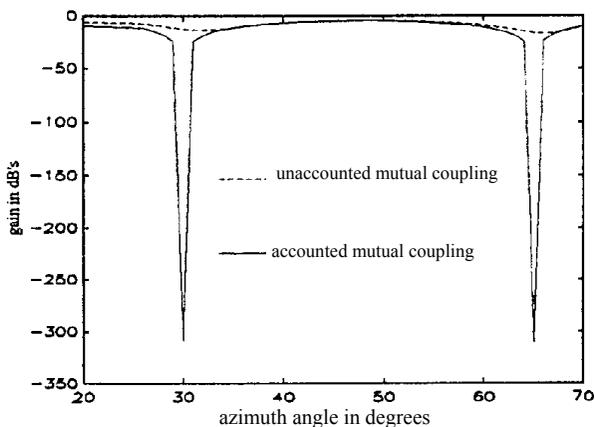


Рис. 4.5. Результат учета взаимного влияния антенных элементов при измерении азимута по методу MUSIC

По вертикальной оси отложен уровень отклика MUSIC-процедуры, а по горизонтальной – азимут источника в градусах. Нетрудно заметить, что игнорирование паразитного эффекта приводит к потерям в энергетике, смещенности результатов пеленгации и даже может сопровождаться пропуском целей. В той или иной степени подобные результаты характерны и для других методов измерения. Поэтому, если структура их решающей функции аналогична процедуре MUSIC, имеет смысл воспользоваться рассмотренным в [75] механизмом учета взаимного влияния антенных элементов. Что же касается подхода, анонсированного в соотношениях (4.46) – (4.48), то он позволяет решить задачу компенсации взаимного влияния в целой группе методов, проектирующие операторы которых в той или иной мере базируются на идеологии классической процедуры максимального правдоподобия.

Речь идет об уже упомянутых алгоритмах IMP, DOSE, а также ASPECT (Adaptive Signal Parameter Estimation and Classification Technique), обзор которых содержится в [76, 80].

Применительно к этим методам, учет взаимного влияния каналов, основанный на формализации модели ЦАР по принципу (4.46) – (4.48), сводится к замене в проектирующих операторах вида  $P[P^* \cdot P]^{-1} \cdot P^*$  и  $1 - P[P^* \cdot P]^{-1} \cdot P^*$  матриц характеристик  $P$ , например, транспонированным торцевым произведением  $P = (H \cdot Q) \blacksquare (W \cdot V)$ , смысл которого раскрыт в (4.46) – (4.48). В более сложной задаче обработки  $M$  сигналов по выходам  $K$  секций конформной ЦАР с нефакторизируемыми характеристиками направленности (ХН) удобно прибегнуть к помощи блочных модификаций процедур умножения, представив матрицу результирующих ХН в векторизованном, подобно (4.115), виде

$$\begin{aligned}
 P &= H [\times] \tilde{Q} [\times] \{(1_K \otimes 1_M) [\otimes] W\} = \\
 &= \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_K \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_K \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} 1_M \\ 1_M \\ \vdots \\ 1_M \end{bmatrix} [\otimes] \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_K \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} H_1 \tilde{Q}_1 (1_M \otimes W_1) \\ H_2 \tilde{Q}_2 (1_M \otimes W_2) \\ \vdots \\ H_K \tilde{Q}_K (1_M \otimes W_K) \end{bmatrix}. \tag{4.143}
 \end{aligned}$$

Здесь  $H$  и  $W$  – блочные матрицы коэффициентов взаимного влияния, аналогичные приведенным в (4.74),  $\tilde{Q}$  – блочная матрица значений ХН в направлениях  $M$  источников, соответствует выражениям (4.91), (4.92), символ "[ $\times$ ]" означает операцию блочного матричного умножения,  $1_K$  – вектор единиц,  $1_M$  – единичная матрица. Истины ради, следует отметить, что подобную запись для матрицы  $P$  можно получить и с помощью классического

произведения матриц, например, путем диагонализации блок-столбцов  $H$  и  $\tilde{Q}$ . Однако такой путь представляется более громоздким.

В качестве сканирующего множителя в соответствующих процедурах измерения следует использовать один из столбцов матрицы результирующих характеристик  $P$ , заменяя тем самым ее многосигмальную структуру односигмальной. В частности, следуя [80], при  $P = (H \cdot Q) \blacksquare (W \cdot V)$  процедуру DOSE можно интерпретировать как

$$\rho = \frac{e^T(x, y) U U^* e(x, y)}{e^T(x, y) \left[ 1 - P [P^* \cdot P]^{-1} \cdot P^* \right] e(x, y)} = \max, \quad (4.144)$$

где  $e(x, y)$  – сканирующий вектор вида  $e(x, y) = (H \cdot Q(x)) \blacksquare (W \cdot V(y))$  или, что в данном случае то же самое,  $e(x, y) = (H \cdot Q(x)) \otimes (W \cdot V(y))$ ;  $U$  – вектор отсчетов напряжений сигнальной смеси;  $Q(x)$  и  $V(y)$  – первые столбцы матриц  $Q$  и  $V$ , образующих многосигмальную  $P$ , матрицы  $H$  и  $W$  соответствуют (4.46) – (4.48).

Данный прием предпочтителен и в отношении методов типа MUSIC или ESPRIT [76]. Достаточно наряду с адекватной компоновкой корреляционных матриц выразить сканирующий вектор через торцевые произведения векторов  $XH$ ,  $AЧХ$  или отсчетов огибающей (откликов стробов).

В случае многосекционной ЦАР со взаимным влиянием каналов и факторизуемыми  $XH$  для записи сканирующего вектора удобно воспользоваться выражением матрицы  $P$ , представленным в (4.74). В результате перехода к односигальному варианту  $P$  для блочных матриц  $H, W, Q, V$  получим

$$\begin{aligned} e(x, y) &= (H [\otimes] W) [\times] (Q \ominus V) = \\ &= (H [\otimes] W) [\times] (Q [\otimes] V) \end{aligned}, \quad (4.145)$$

откуда, в конечном счете, приходим к блок–вектору, содержащему  $K$  блоков  $[H_k Q_k] \blacksquare [W_k V_k]$ , компоненты которых раскрыты в (4.74).

Наконец, для случая (4.143)  $e(x, y)$  является результатом векторизованного блочного произведения блок–матриц весовых коэффициентов и нефакторизованных ХН

$$e(x, y) = \text{vec}(H [\times] \tilde{Q} [\times] W) =$$

$$= \text{vec} \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_k \end{bmatrix} [\times] \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_k \end{bmatrix} \right) = \text{vec} \begin{bmatrix} H_1 Q_1 W_1 \\ H_2 Q_2 W_2 \\ \vdots \\ H_k Q_k W_k \end{bmatrix}, \quad (4.146)$$

причем блоки матрицы  $\tilde{Q}$  имеют тот же вид, что и в (4.86).

Таким образом, предложенный подход к учету взаимного влияния антенных элементов может легко обобщаться с помощью с матричных операций на различные классы измерительных процедур, что делает его более действенным по сравнению с концепцией [75].

При решении задачи разрешения множества источников сигналов на основе метода максимального правдоподобия и квазиоптимальных методов спектрального оценивания важная роль отводится определению количества источников. Применительно к рассматриваемому случаю суть его состоит в использовании модифицированной записи функции правдоподобия, предложенной в [8]:

$$L = (U - PA)^T (U - PA) = \min; \quad (4.147)$$

$$L = U^T U - U^T PA - (PA)^T U + (PA)^T PA = \min. \quad (4.148)$$

Отсюда, согласно [8], информационный эквивалент функции правдоподобия может быть представлен в виде

$$L = U^T P A + (P A)^T U = \max. \quad (4.149)$$

Задача проверки гипотез состоит в подстановке измеренных при различных структурах матрицы  $P$  значений углового положения целей в соответствующий вариант функции (4.149) с последующим выбором совокупности оценок угловых координат, обеспечивающей достижение наибольшего из значений (4.149). При этом в соответствии с изменением количества источников должно изменяться и количество блоков в структуре матрицы  $P$ .

Таким образом, в качестве искомым оценок углового положения целей фиксируется та их комбинация, которая соответствует выделенному максимуму (4.149). Кроме того, при определении числа источников, следует выполнить пороговое тестирование (4.149), регламентация которого может быть осуществлена согласно традиционным рекомендациям по выбору порогов принятия решений.

Как уже отмечалось, ЦАР обладают рядом неоспоримых преимуществ перед ФАР в вопросах помехозащищенности и полноты реализации потенциальных возможностей цифровой обработки сигналов по точности и разрешающей способности. Основной причиной тому является недостаточная точность фиксации амплитудно-фазового распределения электромагнитного поля по раскрытию решетки, осуществляемая в ФАР с помощью фазовращателей (ФВ), разрядность которых обычно не превышает 6 – 7 бит. В ЦАР же для этих целей могут использоваться АЦП и ЦАП с вдвое большей разрядностью (12 – 14 бит), что позволяет, в частности, формировать в ЦАР более глубокие провалы в диаграмме направленности решетки в направлениях на источники помех, более точно измерять угловые координаты абонентов на этапе входа в связь. Другой аспект состоит в большей неидентичности ФВ по сравнению с характеристиками АЦП и ЦАП, что также приводит в ФАР к дополнительным энергетическим потерям.

Обработка принятых сигналов в ЦАР в условиях помех предполагает осуществление анализа помеховой обстановки в режиме “молчания” передатчика путем пеленгации источников активных помех, если таковые имеются, для определения весовых коэффициентов, обеспечивающих последующее вычитание помеховых откликов из выходных напряжений приемных каналов.

Пеленгация помех осуществляется методами спектрального оценивания:

а) оптимальным (максимум правдоподобия), сводящимся к поиску максимума функционала

$$L = \text{tr}[G \cdot \tilde{R}] \rightarrow \max, \quad (4.150)$$

где  $G = P[P^*P]^{-1}P^*$ ,  $\tilde{R} = UU^*$ ,

или, с учетом свойства векторов  $\text{tr}[UU^*] = U^*U$ ,

$$L = \text{tr}[G \cdot \tilde{R}] = \text{tr}[GUU^*] = U^* \cdot G \cdot U \rightarrow \max \quad (4.151)$$

(итерационный поиск максимума выражения (4.151) на множестве оценок параметров сигналов требует меньше вычислительных затрат);

б) квазиоптимальными (MUSIC, Кейпона, ESPRIT и др.);

в) классическими методами (метод максимума диаграммы направленности, моноимпульсный метод и др., основанные на электронном сканировании диаграммой направленности в пространстве).

Расчет весовых коэффициентов для формирования "нулей" диаграммы направленности решетки в направлениях прихода помех может выполняться с помощью известного алгоритма, матричная запись которого может быть представлена в виде

$$\tilde{G} = 1 - P \cdot (P^* \cdot P)^{-1} \cdot P^*, \quad (4.152)$$

где 1 – единичная матрица (на главной диагонали единицы, а остальные элементы – нулевые), а в качестве матрицы P может ис-

пользоваться матрица, столбцы которой образованы векторами волнового фронта помеховых сигналов с аргументами комплексных экспонент, соответствующими значениям угловых координат, вдоль которых должны ориентироваться "нули" передаточной функции ЦАР; \* – символ операции комплексно-сопряженного транспонирования матрицы.

Например, в случае одного помехопостановщика, действующего с углового направления  $\theta$  град. относительно нормали к 4-элементной решетке, матрица  $P$  может быть записана в виде

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{jx} \\ e^{j2x} \\ e^{j3x} \end{bmatrix}, \text{ где } x = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\left(\theta \frac{\pi}{180}\right).$$

При этом весовой множитель для формирования провала в диаграмме направленности рассчитывается согласно выражению

$$\tilde{G}_1 = \left(1 - \frac{1}{R} P \cdot P^*\right),$$

где  $R$  – количество антенных элементов в решетке, в данном случае равно 4.

При воздействии двух помехопостановщиков с известными координатами  $\theta_1, \theta_2$ , полученными по данным целеуказания или в результате автономной пеленгации, матрица  $P$  запишется в виде

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{jx_1} & e^{jx_2} \\ e^{j2x_1} & e^{j2x_2} \\ e^{j3x_1} & e^{j3x_2} \end{bmatrix}, \text{ где } x_1 = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\left(\theta_1 \frac{\pi}{180}\right), \quad x_2 = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\left(\theta_2 \frac{\pi}{180}\right).$$

Аналогично, задача формирования матрицы  $P$  для расчета весовых коэффициентов подавления помех обобщается на случай

произвольного количества каналов ЦАР (добавлением строк снизу) и помехопостановщиков (добавлением столбцов справа).

Вычитание помеховых сигналов из напряжений приемных каналов производится на основе информации об угловом положении помехопостановщиков, согласно выражению

$$U_b = \tilde{G} \cdot U_0, \quad (4.153)$$

где  $U_0$  – исходный вектор напряжений;  $U_b$  – он же после вычитания откликов помех.

На завершающем этапе обработки сигналов, например, по методу максимального правдоподобия, путем перебора неизвестных угловых координат целей осуществляется ориентация максимумов диаграммы направленности ЦАР в направлениях приема полезных сигналов. При этом в направлении помехи должен по-прежнему формироваться провал диаграммы направленности. С этой целью вектор напряжений, полученный после процедуры вычитания помех, фазировается с помощью сигнального вектора  $S$  согласно выражению

$$\begin{aligned} U_b &= S^* \cdot \tilde{G} \cdot U_0 = \\ &= S^* (I - P \cdot [P^* \cdot P]^{-1} \cdot P^*) U_0, \end{aligned} \quad (4.154)$$

где  $S = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j \cdot y} \\ e^{j \cdot 2 \cdot y} \\ e^{j \cdot 3 \cdot y} \end{bmatrix}$  – сигнальный вектор;  $y = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\left(\beta \frac{\pi}{180}\right)$ ;

$\beta$  – угловая координата (в градусах) источника сигналов, в направлении которого необходимо сформировать максимум диаграммы направленности ЦАР.

Для демонстрации работоспособности процедуры подавления помех (4.153) и последующего формирования максимума диа-

граммы направленности в требуемом направлении (4.154) можно привести результаты математического моделирования в пакете Mathcad, представленные на рис. 4.6, 4.7.

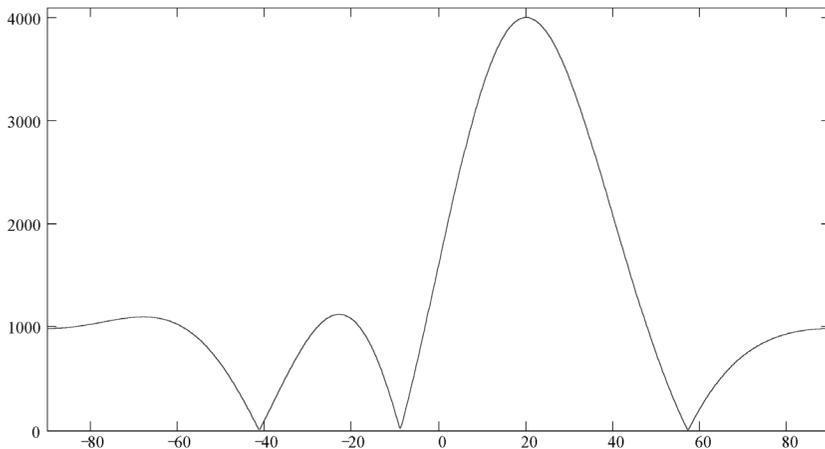


Рис. 4.6. Сигнальная смесь до подавления помехи

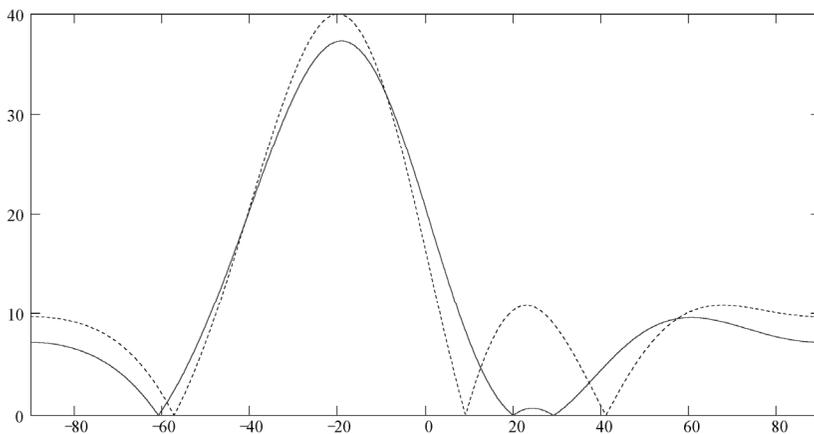


Рис. 4.7. Сигнальная смесь после подавления помехи (сплошная линия) и отклик решетки в беспомеховой ситуации (пунктир)

При этом угловая координата полезного сигнала была задана равной  $-20^{\circ}$ , а одиночной помехи  $+20^{\circ}$  относительно нормали к 4-элементной решетке. Амплитуда сигнала составляла 10 условных единиц, а помехи – 1000, разность фаз сигнала и помехи равнялась  $45^{\circ}$ . Нетрудно заметить, что в результате вычитания помехи происходит искажение сигнального отклика, которое растет по мере сближения угловых координат провала диаграммы направленности и направления на полезный сигнал (см. рис. 4.8).

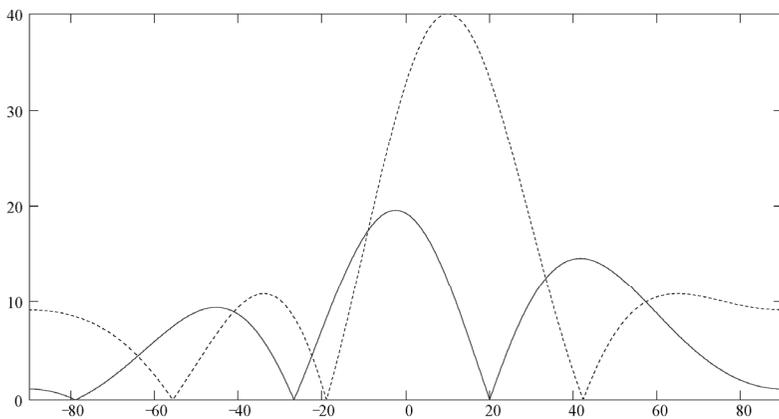


Рис. 4.8. Искажение сигнального отклика (сплошная линия) после вычитания помехи при разности их угловых координат  $10^{\circ}$  (источник помехи находится на  $20^{\circ}$ ), пунктирная линия – сигнальный отклик в отсутствие помех

Следует отметить, что глубина подавления помехи определяется не только разрядностью фазирующих коэффициентов, но и, прежде всего, точностью измерения координат помехопостановщика. При этом погрешность в десятые доли градуса уже приводит к недопустимым искажениям диаграммы направленности после подавления сигнала, вызванным нескомпенсированными остатками помехи. В качестве примера на рис. 4.9 в виде верхней

кривой показан отклик 4-элементной решетки после вычитания одиночной помехи, погрешность измерения координат которой составила  $0,5^{\circ}$ . Для снижения влияния ошибок пеленгации на качество подавления помехи может быть рекомендовано использование двухстолбцевой матрицы  $P$  при формировании весового вектора, при этом в качестве аргументов экспонент должны задаваться угловые координаты левой и правой границ сектора возможного нахождения помехи (например, измеренная угловая координата за вычетом СКО ошибки измерения и с добавлением этого СКО) [44]. Об эффективности такого подхода позволяет судить штриховая линия на рис. 4.9, описывающая отклик решетки при формировании двойного провала в направлении помехи ( $20^{\circ}$ ).

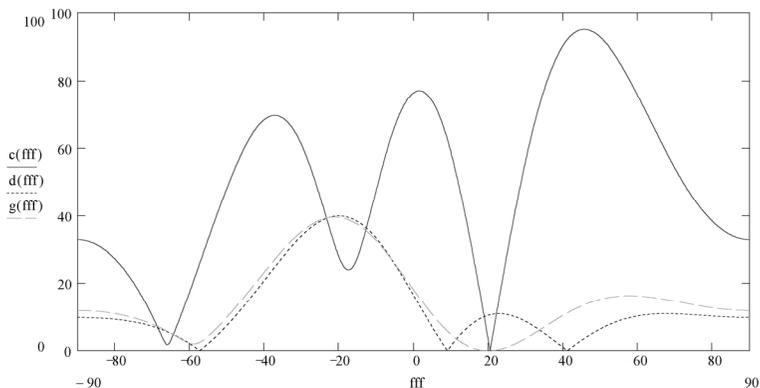


Рис. 4.9. Отклик 4-элементной ЦАР после вычитания одиночной помехи, погрешность измерения координат источника которой составила  $0,5^{\circ}$  (сплошная линия), и результат формирования двойного провала в направлении помехи (штриховая линия) на фоне беспомехового отклика ЦАР (пунктирная линия)

При этом координаты провалов симметрично смещены относительно пеленга помехи на величину  $\pm 1^{\circ}$ . Точечной линией по-

прежнему представлен беспомеховый сигнальный отклик. В целом результаты многих демонстрационных проектов свидетельствуют о возможности достижения подавления широкополосной помехи рассмотренным способом на величину не менее 30–40 дБ.

При факторизуемых диаграммах направленности сказанное справедливо и для раздельного функционирования помехозащитных процедур в ортогональных угловых плоскостях. В этом случае для описания матрицы  $P$  следует использовать произведение Хатри–Рао.

Задача подавления помех может решаться совместно в пространственной и спектральной областях. Опираясь на рассмотренный метод подавления помех (4.153), весовой вектор для одновременного формирования "нулей" в диаграммах направленности ЦАР и амплитудно-частотных характеристиках цифровых фильтров приемных каналов можно получить, подставив в (4.152) матричное произведение Хатри–Рао  $P = Q \cdot V \cdot F$ , причем столбцы матриц, образующих  $P$ , соответствуют тем значениям координат, вдоль которых должны ориентироваться "нули" передаточной функции ЦАР.

При этом вовсе необязательно, чтобы участки режекции в пространственной и частотной областях дублировали друг друга по одним и тем же источникам помех. Вполне возможно, что часть мешающих сигналов будет подавляться формированием "нулей" только в диаграммах направленности, без какой-либо режекции в частотной области, а другая, напротив, беспрепятственно проходить через диаграммообразующую и пеленгационную обработку, вычитаясь по выходам частотных фильтров. При факторизуемых диаграммах направленности сказанное справедливо и для раздельного функционирования помехозащитных процедур в ортогональных угловых плоскостях. В основе такой возможности лежит все то же соотношение (4.129).

В 4-координатном случае матрица  $P$  в (4.152) может быть представлена подобно (4.127) в виде произведения Хатри–Рао

4 матриц:  $P = Q \cdot V \cdot F \cdot S$ . При этом появляется возможность производить очистку откликов стробов дальности от нескомпенсированных остатков узкополосных помех, лишь частично заполняющих интересующий строб. Соотношение (4.152) с учетом 4-компонентного представления матрицы  $P$  является обобщением соответствующей помехозащитной процедуры на случай произвольной огибающей и многокоординатных измерений.

*Методики пересчета результатов  
сверхрелеевского разрешения  
в оценки параметров сигналов*

Широко распространенным в радиолокации методом повышения разрешающей способности по любой из координат является предварительное разрешение сигналов по другим параметрам, из числа подлежащих измерению. Достижимый эффект при этом, как отмечалось в [48], может быть существенно улучшен при использовании процедур сверхрелеевского разрешения, переход от которых к оценкам интересующих координат нуждается соответственно в специальных алгоритмах пересчета.

В работах [28, 29] для измерения времени задержки прямоугольных радиоимпульсов использовалось их предварительное разрешение по направлению прихода или доплеровскому сдвигу частоты. При этом в [28, 29] по результатам сверхрелеевского разрешения определялись комплексные амплитуды сигналов и лишь затем, с помощью многосигнальных алгоритмов, выполнялся переход к оценкам других параметров источников, в данном случае – дальности.

Проведенные автором исследования показали, что такой подход неизбежно сопровождается дополнительными погрешностями оценивания, возникающими на этапе определения квадратурных составляющих амплитуд сигналов. Кроме того, для указанных пересчетных процедур характерна невозможность унификации вследствие существенной зависимости их структуры от ко-

личества источников. Поэтому принципиальное отличие предложенного соискателем подхода состоит в использовании 1-целевых алгоритмов (они же именуются далее 1-сигнальными) для измерения тех параметров источников, по которым не удастся произвести разрешение. В статье [48] было дано подробное изложение общей методики такого перехода от результатов сверхрелеевого разрешения к оценкам остальных параметров произвольных сигналов, основанной на использовании 1-сигнальных алгоритмов измерения. Поскольку по времени своего написания работа [48] предшествовала созданию теории торцевых произведений матриц, в ней не нашли отражения варианты решения данной проблемы применительно к моделям РЛС с ЦАР, базирующимся на семействе матричных операций торцевого умножения. В этой связи далее необходимо восполнить этот пробел, предварив изложение сути подхода рассмотрением ключевых положений концепции [48]. Такой прием позволит сохранить логическую взаимосвязь и преемственность последующих умозаключений, облегчив вместе с тем восприятие впервые декларируемых выкладок.

В качестве примера, иллюстрирующего суть подхода, рассмотрим вначале задачу измерения угловых координат  $M$  источников в 2-координатной РЛС с линейной ЦАР при условии предварительного сверхрелеевого разрешения целей по дальности. При этом будем полагать, что после аналого-цифрового преобразования напряжений было произведено когерентное накопление отсчетов АЦП в жестко отведенных интервалах времени – стробах. Ориентируясь на предельно общий случай, в соответствии с [48], условимся, что зондирующие импульсы существуют на протяжении  $G$  таких временных интервалов. Что же касается распределения отраженных сигналов вдоль временной оси, то для удобства предположим, что их начала сосредоточены в одном стробе. Тогда матричная запись откликов  $R$  пространственных каналов ЦАР в  $G$  стробах дальности может быть выражена в виде

$$U = Q \cdot \text{diag}[A] \cdot S^*, \quad (4.155)$$

где  $U$  – матрица (вектор) комплексных напряжений откликов  $R$  пространственных каналов ЦАР в  $G$  стробах дальности;  $Q$  –  $R \times M$  – матрица значений комплексных характеристик направленности приемных каналов в направлениях  $M$  источников ( $x_m$ ) (в статье [48] при описании размерности аналогичной матрицы индексы  $M$  и  $R$  оказались переставлены местами)

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \dots & Q_1(x_M) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) & \dots & Q_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) & \dots & Q_R(x_M) \end{bmatrix};$$

$A = [\dot{a}_1 \ \dot{a}_2 \dots \ \dot{a}_M]^T$  – вектор комплексных амплитуд  $M$  радиоимпульсов;  $S$  –  $G \times M$  – матрица аналитических описаний откликов  $G$  стробов дальности для  $M$  сигналов, причем  $z_m$  – смещение  $m$ -го импульса в отсчетах АЦП относительно первого из сигнальных стробов;

$$S = \begin{bmatrix} S_1(z_1) & S_1(z_2) & \dots & S_1(z_M) \\ S_2(z_1) & S_2(z_2) & \dots & S_2(z_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_G(z_1) & S_G(z_2) & \dots & S_G(z_M) \end{bmatrix};$$

для вещественной матрицы  $S$  знак "\*" соответствует операции обычного транспонирования, впрочем ее элементы могут иметь и комплексный характер, если результаты суммирования отсчетов АЦП в стробах не будут совпадать в квадратурных составляющих.

Полагая, что в результате разрешения сигналов по времени задержки компоненты матрицы  $S$  стали известны, определим матрицу обобщенных по угловой координате  $x$  комплексных амплитуд сигналов  $W = Q \text{diag}[A]$  с элементами  $W_{rm} = \dot{a}_m Q_r(x_m)$ .

Воспользовавшись для этого методом наименьших квадратов, несложно выразить минимизируемый функционал в виде

$$L = \text{tr} \left\{ \left[ U - WS^* \right]^* \left[ U - WS^* \right] \right\}. \quad (4.156)$$

В результате дифференцирования (4.156) по матрице  $W$  получим известную оценку

$$W = \left[ S^* S \right]^{-1} S^* U^*. \quad (4.157)$$

Определив, согласно (4.157), обобщенные амплитуды сигналов, далее можно решить пеленгационную задачу, применяя известные 1-сигнальные алгоритмы измерения. Существенно, что при этом в качестве напряжений должны фигурировать элементы матрицы  $W$ , соответствующие искомому источнику.

При иных расположениях сигналов относительно сетки стробов для определения матрицы (4.157) необходимо вносить изменения в структуру матрицы  $S$ , обнуляя соответствующие ее элементы. Например, в ситуациях, когда окончание одного сигнала приходится на строб начала следующего, и длительность радиопульса совпадает с временной протяженностью строга, упомянутая матрица  $S$  будет ленточной

$$S = \begin{bmatrix} S_1(z_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_2(z_1) & S_2(z_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_3(z_2) & S_3(z_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_G(z_M) \end{bmatrix}.$$

Рассмотренный пример процедуры пересчета легко обобщается на задачу совместного измерения времени задержки и доплеровской частоты, достаточно лишь трактовать элементы матрицы  $Q$  как значения частотных характеристик  $R$  фильтров на частотах  $M$  источников.

Аналогично, используя понятие обобщенных по времени амплитуд  $\dot{W}_{gm} = \dot{a}_m S_g(z_m)$ , осуществляется обратный рассмотренному переход от результатов сверхрелеевого разрешения по угловым координатам или частоте к 1-сигнальной дальнометрии. Для вывода соответствующей процедуры пересчета следует переписать систему уравнений (4.155) в виде

$$U = QW, \quad (4.158)$$

где  $W = \text{diag}[A]S^*$  – матрица обобщенных по времени амплитуд сигналов.

Применительно к обсуждавшемуся выше случаю прихода  $M$  радиоимпульсов в одном строке дальности и существования их на протяжении всех  $G$  стробов матрица  $W$  будет выглядеть как

$$W = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 S_1(z_1) & \dot{a}_1 S_2(z_1) & \cdots & \dot{a}_1 S_G(z_1) \\ \dot{a}_2 S_1(z_2) & \dot{a}_2 S_2(z_2) & \cdots & \dot{a}_2 S_G(z_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{a}_M S_1(z_M) & \dot{a}_M S_2(z_M) & \cdots & \dot{a}_M S_G(z_M) \end{bmatrix}.$$

С помощью метода наименьших квадратов для (4.158) можно получить столь же известную, подобно (4.157), оценку обобщенных по времени амплитуд сигналов

$$W = [Q^* \cdot Q]^{-1} \cdot Q^* \cdot U. \quad (4.159)$$

Далее, задействовав необходимые для функционирования 1-сигнальных алгоритмов элементы матрицы  $W$ , несложно определить оценки времени задержки  $d_m$  каждого из сигналов пакета. При  $\sin^2$ -огибающей радиоимпульса для этого можно воспользоваться 4-стробной процедурой, представленной в [51],

$$\begin{aligned} \text{tg}(2d_m)x = & \\ = & \frac{\left( \left| \dot{W}_{m,i} \right| - \left| \dot{W}_{m,i+2} \right| \right) \sin(z_1 + z_3)x - \left( \left| \dot{W}_{m,i+1} \right| - \left| \dot{W}_{m,i+3} \right| \right) \sin z_2 x}{\left( \left| \dot{W}_{m,i+1} \right| - \left| \dot{W}_{m,i+3} \right| \right) \cos z_2 x - \left( \left| \dot{W}_{m,i} \right| - \left| \dot{W}_{m,i+2} \right| \right) \cos(z_1 + z_3)x} \end{aligned}, \quad (4.160)$$

где  $d_m$  – временной сдвиг первого из задействованных отсчетов относительно начала импульсного сигнала в периодах дискретизации АЦП, характеризующий дальность до  $m$ -й цели;  $x = \pi/N$ ,  $N$  – длительность импульса в отсчетах АЦП;  $z_m$  – временной интервал между первым и  $m$ -м по счету из задействованных комплексных отсчетов сигнала;  $|\dot{W}_{m,i}|$  – модуль обобщенной амплитуды  $m$ -го импульса в  $i$ -м временном отсчете.

Таким образом, резюмируя сказанное, можно сформулировать суть предлагаемой методики следующим образом: по результатам свёрхрелеевого разрешения согласно выражениям (4.157) или (4.159) определяют обобщенные по соответствующему параметру комплексные амплитуды сигналов и далее используют их в качестве напряжений в рамках 1-сигнальных измерений.

Рассмотренный подход позволяет снять ограничения, которые следуют из понятия функции неопределенности для совместного измерения нескольких параметров. В данном случае свёрхрелеевское разрешение по одному из них одновременно означает и разрешение по всем остальным.

Наконец, важно подчеркнуть, что в предложенных алгоритмах в зависимости от количества источников изменяется только процедура вычисления обобщенных амплитуд, тогда как пересчет их в оценки интересующих параметров производится по одним и тем же 1-сигнальным методам.

В случае многокоординатных РЛС, как уже неоднократно подчеркивалось, преимуществом в компактности матричной записи обладают аналитические модели, базирующиеся на торцевых произведениях матриц, в частности произведении Хатри-Рао. Поэтому имеет смысл распространить изложенную выше методику пересчета на более общий случай многокоординатного оценивания.

Для начала ограничимся рассмотрением абстрактной 2-координатной задачи, которой соответствует формализованная модель РЛС с ЦАР вида

$$U = (Q \cdot S) A. \quad (4.161)$$

Как уже отмечалось, соотношение (4.161) является функциональным аналогом (4.155). Поэтому, опираясь на данный факт, можно достаточно просто осуществить взаимное согласование двух альтернативных методов, (4.155) и (4.161), аналитического представления напряжений многокоординатной радиолокационной системы.

Будем по-прежнему полагать, что координате  $z$ , по которой проводилось первичное разрешение, соответствует известная матрица характеристик  $S$ . Элементы же другой матрицы  $Q$  подлежат дальнейшему вычислению через обобщенные по неизвестному параметру амплитуды. При этом удобно воспользоваться уже зарекомендовавшим себя оцениванием по методу наименьших квадратов, для чего следует соответствующим образом трансформировать выражение (4.161). Целью такого преобразования является вычисление в правой части (4.161) матрицы обобщенных по неизвестной координате амплитуд с тем, чтобы в дальнейшем можно было использовать уже изложенную выше схему пересчета.

Предположим, что в результате предварительного разрешения компоненты матрицы  $S$  стали известны. В рамках данного допущения воспользуемся приводившимся ранее тождеством (4.34)

$$\text{invec}_M [(Q \blacksquare S) A] = S (A \square Q^T), \quad (4.162)$$

на основании которого можно записать функционал невязок типа (4.156)

$$\tilde{L} = \text{tr} \left[ \{ \tilde{V} - SW \}^* \{ \tilde{V} - SW \} \right], \quad (4.163)$$

где  $\tilde{V} = \text{invec}_M U$ ;  $W = (A \square Q^T)$

или

$$W = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \cdot [Q_1(x_1) Q_2(x_1) \cdots Q_R(x_1)] \\ \dot{a}_2 \cdot [Q_1(x_2) Q_2(x_2) \cdots Q_R(x_2)] \\ \vdots \\ \dot{a}_M \cdot [Q_1(x_M) Q_2(x_M) \cdots Q_R(x_M)] \end{bmatrix}.$$

Таким образом, разрешив источники сигналов по координате  $z$ , являющейся аргументом для  $S$ , далее через оператор  $\text{invec}_M$  необходимо перейти от вектор-столбца напряжений  $U$  к их матрице  $\text{invec}_M U$  и определить обобщенные по координате  $z$  амплитуды как элементы матрицы

$$W = (A \square Q^T) = [S^T S]^{-1} S^T \text{invec}_M U. \quad (4.164)$$

В альтернативном случае, когда предварительное разрешение выполнялось по координате  $z$ , ключевым является другое тождество (см. (4.33))

$$\text{invec}_M [(Q \blacksquare S) A] = (A^T \blacksquare S) Q^T. \quad (4.165)$$

При этом в качестве известной матрицы должна рассматриваться транспонированная матрица  $Q^T$ , а в роли матрицы обобщенных амплитуд – соответственно

$$W = (A^T \blacksquare S) = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \begin{bmatrix} S_1(z_1) \\ S_2(z_1) \\ \vdots \\ S_G(z_1) \end{bmatrix} & \dot{a}_2 \begin{bmatrix} S_1(z_2) \\ S_2(z_2) \\ \vdots \\ S_G(z_2) \end{bmatrix} & \dots & \dot{a}_M \begin{bmatrix} S_1(z_M) \\ S_2(z_M) \\ \vdots \\ S_G(z_M) \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.166)$$

С учетом (4.165), (4.166), функционал невязок (4.163) переписывается в виде

$$\tilde{L} = \text{tr} \{ [\tilde{V} - W Q^T]^* [\tilde{V} - W Q^T] \}. \quad (4.167)$$

Результатом его минимизации по неизвестной матрице  $W$  является оценка

$$W = [Q^T Q]^{-1} Q^T \cdot (\text{invec}_M U)^*. \quad (4.168)$$

Примечательно, что в обоих случаях, (4.164) и (4.168), используется один и тот же вектор-столбец напряжений, трансформируемый с помощью оператора "inves<sub>M</sub>" в матрицу invес<sub>M</sub>U.

Поскольку тождество (4.165) в первом разделе было приведено без доказательства, уместно продемонстрировать его справедливость в рассматриваемом частном случае. Итак, в соответствии с (4.165),

$$\begin{aligned}
 (A^T \blacksquare S) Q^T &= \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \begin{bmatrix} S_1(z_1) \\ S_2(z_1) \\ \vdots \\ S_G(z_1) \end{bmatrix} & \dot{a}_2 \begin{bmatrix} S_1(z_2) \\ S_2(z_2) \\ \vdots \\ S_G(z_2) \end{bmatrix} & \dots & \dot{a}_M \begin{bmatrix} S_1(z_M) \\ S_2(z_M) \\ \vdots \\ S_G(z_M) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_2(x_1) & \dots & Q_R(x_1) \\ Q_1(x_2) & Q_2(x_2) & \dots & Q_R(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_1(x_M) & Q_2(x_M) & \dots & Q_R(x_M) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M \dot{a}_m S_1(z_m) Q_1(x_m) & \dots & \sum_{m=1}^M \dot{a}_m S_1(z_m) Q_R(x_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{m=1}^M \dot{a}_m S_G(z_m) Q_1(x_m) & \dots & \sum_{m=1}^M \dot{a}_m S_G(z_m) Q_R(x_m) \end{bmatrix}, \quad (4.169)
 \end{aligned}$$

с другой стороны:

$$\begin{aligned}
 (Q \blacksquare S) A &= \\
 &= \left[ \sum_{m=1}^M \dot{a}_m S_1(z_m) Q_1(x_m) \quad \dots \quad \sum_{m=1}^M \dot{a}_m S_G(z_m) Q_1(x_m) \quad \dots \quad \sum_{m=1}^M \dot{a}_m S_G(z_m) Q_R(x_m) \right]^T. \quad (4.170)
 \end{aligned}$$

Таким образом,  $(Q \blacksquare S) A = \text{vec} [(A^T \blacksquare S) Q^T]$ , откуда

$$(A^T \blacksquare S) Q^T = \text{invec}_M [(Q \blacksquare S) A],$$

что и требовалось показать (в данном случае  $M=G$ ).

При совместном оценивании трех и более координат рассмотренный подход в целом также остается в силе, однако конкретный механизм его реализации нуждается в корректировке. Нюансы таковой удобно рассматривать на примере 4-координатной модели РЛС с ЦАР вида

$$U = (Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) A. \quad (4.171)$$

Обозначив  $W = Q \blacksquare V \blacksquare F$ , несложно перейти от (4.171) к прежней записи, соответствующей 2-координатной задаче,

$$U = (W \blacksquare S) A.$$

Отсюда, с учетом (4.162), получим

$$S (A \square W^T) = \text{invec}_M [(W \blacksquare S) A], \quad (4.172)$$

или

$$S (A \square Q^T \square V^T \square F^T) = \text{invec}_M [(Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) A]. \quad (4.173)$$

Таким образом, по известной матрице  $S$  аналогично (4.157), можно определить компоненты матрицы обобщенных амплитуд  $A \square Q^T \square V^T \square F^T$ :

$$\tilde{L} = \text{tr} \left[ \left\{ \tilde{V} - SW \right\}^* \left\{ \tilde{V} - SW \right\} \right];$$

$$W = (A \square Q^T \square V^T \square F^T) = [S^T S]^{-1} S^T \text{invec}_M U,$$

используя которые, можно перейти к 1-целевым алгоритмам оценивания.

С другой стороны, обозначив в (4.171)  $W = V \blacksquare F \blacksquare S$ , несложно получить

$$\text{invec}_M [(Q \blacksquare W) A] = (A^T \blacksquare W) Q^T, \quad (4.174)$$

или

$$\text{invec}_M[(Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) A] = (A^T \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) Q^T. \quad (4.175)$$

Откуда,

$$\tilde{L} = \text{tr} \left\{ \left[ \tilde{V} - WQ^T \right]^* \left[ \tilde{V} - WQ^T \right] \right\},$$

$$W = [Q^T Q]^{-1} Q^T \cdot (\text{invec}_M U)^*. \quad (4.176)$$

Таким образом, в многокоординатном случае, когда матрица первичного разрешения координат находится в одной из окаймляющих ПХР позиций, может непосредственно применяться механизм пересчета, характерный для 2-координатной задачи. С этой точки зрения для первичного разрешения предпочтительно использовать ту координату, матрица характеристик которой находится в формализованной модели РЛС в крайнем левом либо правом положениях. В тех же случаях, когда такого рода выбор осуществляется в пользу внутренних для ПХР матриц, наиболее простое решение состоит в перепаковке вектора цифровых отсчетов напряжений по схеме, при которой интересующая матрица первичного разрешения перемещается в одну из окаймляющих позиций. То есть, если

$$U_I = (Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) A, \quad (4.177)$$

а разрешение необходимо осуществить по координате, являющейся аргументом матрицы  $B$ , то вместо блок-вектора  $U_I$  следует перейти, например, к блок-вектору

$$U_{II} = (V \blacksquare Q \blacksquare S \blacksquare F) A. \quad (4.178)$$

Очевидно, что для минимизации количества перепаковок в рассматриваемом случае из всех возможных вариантов следует выбрать то преобразование, при котором все окаймляющие матрицы меняются местами с внутренними. В результате, к примеру,

для 3- и 4-координатной задач радиолокационных измерений требуется осуществить лишь одну переупаковку векторного массива напряжений. При этом в памяти устройства цифровой обработки достаточно хранить всего два варианта упаковок информационных данных:  $U_I$  и  $U_{II}$ .

Аналогичные процедуры пересчета координат имеют место и для моделей РЛС с ЦАР на базе обобщенных торцевых произведений, когда приемные каналы обладают неидентичными характеристиками. Однако подробное освещение этого вопроса выходит за рамки данного издания.

### *Модели цифровых антенных решеток двойной поляризации*

При синтезе методов измерения координат целей для многокоординатных радиолокационных систем, действующих по принципу ММО (множественный вход – множественный выход) с приемными ЦАР, спроектированными для работы с сигналами двойной поляризации, проблема компактной матричной записи представления откликов приемных каналов может быть решена на основе использования блочного произведения Хатри–Рао (4.51). В качестве примера рассмотрим матричное представление напряжений отраженных от целей многочастотных сигналов по выходу отдельно взятой плоской ЦАР с  $R \times D$  идентичными элементами и факторизованными характеристиками направленности. В случае измерения угловых координат целей и частотной селекции сигналов двойной поляризации искомое соотношение может быть выражено в общем виде через блочное произведение Хатри–Рао (без учета шума) как

$$U = \begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix} = \left\{ \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & | & d_{HV} \mathbf{Q}_V \\ \hline d_{VH} \mathbf{Q}_H & | & \mathbf{Q}_V \end{bmatrix} \right) \bullet \left( \begin{bmatrix} \mathbf{V}_H & | & d_{HV} \mathbf{V}_V \\ \hline d_{VH} \mathbf{V}_H & | & \mathbf{V}_V \end{bmatrix} \right) \right\} \bullet$$

$$\begin{aligned} & \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{F}_H & \mathbf{F}_V \\ \hline \mathbf{F}_H & \mathbf{F}_V \end{array} \right] \right) \left[ \begin{array}{c} A_H \\ A_V \end{array} \right] = \\ & = \left[ \begin{array}{c|c} (\mathbf{Q}_H \mathbf{V}_H) \mathbf{F}_H & (q_{HV} \mathbf{Q}_V \mathbf{d}_{HV} \mathbf{V}_V) \mathbf{F}_V \\ \hline (q_{VH} \mathbf{Q}_H \mathbf{d}_{VH} \mathbf{V}_H) \mathbf{F}_H & (\mathbf{Q}_V \mathbf{V}_V) \mathbf{F}_V \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} A_H \\ A_V \end{array} \right], \quad (4.179) \end{aligned}$$

где  $\begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix}$  – вектор амплитуд сигналов горизонтальной H и вертикальной V поляризации;

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_H &= \begin{bmatrix} Q_{H1}(x_1) & Q_{H1}(x_2) & \cdots & Q_{H1}(x_M) \\ Q_{H2}(x_1) & Q_{H2}(x_2) & \cdots & Q_{H2}(x_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{HR}(x_1) & Q_{HR}(x_2) & \cdots & Q_{HR}(x_M) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{Q}_V &= \begin{bmatrix} Q_{V1}(x_1) & Q_{V1}(x_2) & \cdots & Q_{V1}(x_M) \\ Q_{V2}(x_1) & Q_{V2}(x_2) & \cdots & Q_{V2}(x_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{VR}(x_1) & Q_{VR}(x_2) & \cdots & Q_{VR}(x_M) \end{bmatrix} - \end{aligned}$$

матрицы характеристик направленности первичного (вторичного) приемных каналов в азимутальной плоскости на H(V)-поляризации;

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_H &= \begin{bmatrix} V_{H1}(y_1) & V_{H1}(y_2) & \cdots & V_{H1}(y_M) \\ V_{H2}(y_1) & V_{H2}(y_2) & \cdots & V_{H2}(y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{HD}(y_1) & V_{HD}(y_2) & \cdots & V_{HD}(y_M) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{V}_V &= \begin{bmatrix} V_{V1}(y_1) & V_{V1}(y_2) & \cdots & V_{V1}(y_M) \\ V_{V2}(y_1) & V_{V2}(y_2) & \cdots & V_{V2}(y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{VD}(y_1) & V_{VD}(y_2) & \cdots & V_{VD}(y_M) \end{bmatrix} - \end{aligned}$$

матрицы характеристик направленности первичного (вторичного) каналов в угломестной плоскости на Н (V)-поляризации;

$$F_H = \begin{bmatrix} \dot{F}_{H1}(\omega_{H11}) & \dots & \dot{F}_{H1}(\omega_{HTM}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dot{F}_{HG}(\omega_{H11}) & \dots & \dot{F}_{HG}(\omega_{HTM}) \end{bmatrix}, F_V = \begin{bmatrix} \dot{F}_{V1}(\omega_{V11}) & \dots & \dot{F}_{V1}(\omega_{VTM}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dot{F}_{VG}(\omega_{V11}) & \dots & \dot{F}_{VG}(\omega_{VTM}) \end{bmatrix} -$$

матрица АЧХ  $\dot{F}_{H(V)g}(\omega_{H(V)tm})$  БПФ-фильтров для  $R \times D$  идентичных каналов приема;  $U$  – блок–матрица выходных напряжений приемных каналов в горизонтальной Н и вертикальной V поляризациях;

$$U_H = [U_{H1} \quad U_{H2} \quad \dots \quad U_{HS}]^T; U_V = [U_{V1} \quad U_{V2} \quad \dots \quad U_{VS}]^T;$$

$q_{HV}(q_{VH}), d_{HV}(d_{VH})$  – коэффициенты кроссполяризационной развязки (ХРП) напряжений сигналов вертикальной и горизонтальной поляризации в азимутальной плоскости и в плоскости угла места;  $T$  – количество частот поднесущих, используемых в многочастотном зондирующем сигнале;  $M$  – количество источников сигналов.

Существенно, что плоская ЦАР предоставляет дополнительную степень свободы для повышения эффективности когерентного накопления сигналов за счет увеличения количества антенных элементов. Кроме того, применение плоской ЦАР в ММО-радарх позволяет увеличить допустимое количество одновременно действующих сигналов от целей, при котором возможно их разрешение. Это объясняется возможностью повышения размерности системы уравнений, формируемых по выходным напряжениям ЦАР.

Если характеристики направленности антенных элементов плоской цифровой антенной решетки не поддаются факторизации, то отклик плоской ЦАР на отраженные от целей сигналы в рассматриваемом случае примет вид

$$U = \begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix} = \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{Q}_H & q_{HV} \tilde{Q}_V \\ \hline q_{VH} \tilde{Q}_H & \tilde{Q}_V \end{array} \right] \bullet \left[ \begin{array}{c|c} F_H & F_V \\ \hline F_H & F_V \end{array} \right] \right\} \begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix}, \quad (4.180)$$

$$\text{где } \tilde{Q}_H = \begin{bmatrix} Q_{H1}(x_1, y_1) & Q_{H1}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{H1}(x_M, y_M) \\ Q_{H2}(x_1, y_1) & Q_{H2}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{H2}(x_M, y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{HR}(x_1, y_1) & Q_{HR}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{HR}(x_M, y_M) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{Q}_V = \begin{bmatrix} Q_{V1}(x_1, y_1) & Q_{V1}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{V1}(x_M, y_M) \\ Q_{V2}(x_1, y_1) & Q_{V2}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{V2}(x_M, y_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{VR}(x_1, y_1) & Q_{VR}(x_2, y_2) & \cdots & Q_{VR}(x_M, y_M) \end{bmatrix}.$$

Все предложенные модели (4.179), (4.180) могут быть использованы и при описании процесса функционирования радиолокационной системы, использующей режим ММО, если каждый передатчик ММО имеет уникальный набор частот.

В случае, когда все передатчики используют один и тот же набор частот, предложенные модели откликов ЦАР должны быть изменены. Альтернативная запись для (4.179) может быть выражена через блочное кронекеровское произведение матриц как

$$U = \begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix} = \left\{ \left( \left[ \begin{array}{c|c} Q_H & q_{HV} Q_V \\ \hline q_{VH} Q_H & Q_V \end{array} \right] \bullet \left[ \begin{array}{c|c} V_H & d_{HV} V_V \\ \hline d_{VH} V_H & V_V \end{array} \right] \right) \left[ \otimes \right] \left[ \begin{array}{c|c} F_H & F_V \\ \hline F_H & F_V \end{array} \right] \right\} \begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (Q_H \blacksquare V_H) \otimes F_H & (q_{HV} Q_V \blacksquare d_{HV} V_V) \otimes F_V \\ \hline (q_{VH} Q_H \blacksquare d_{VH} V_H) \otimes F_H & (Q_V \blacksquare V_V) \otimes F_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix}, \quad (4.181)$$

где символ “ $\left[ \otimes \right]$ ” представляет собой блочное кронекеровское произведение, а для (4.180) получаем

$$\begin{aligned}
 U = \begin{bmatrix} U_H \\ U_V \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{Q}_H & | & q_{HV} \tilde{Q}_V \\ \hline q_{VH} \tilde{Q}_H & | & \tilde{Q}_V \end{bmatrix} \left[ \otimes \right] \begin{bmatrix} F_H & | & F_V \\ \hline F_H & | & F_V \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{Q}_H \otimes F_H & | & q_{HV} \tilde{Q}_V \otimes F_V \\ \hline q_{VH} \tilde{Q}_H \otimes F_H & | & \tilde{Q}_V \otimes F_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_H \\ A_V \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, представленные аналитические соотношения для описания отклика ЦАР в случае использования сигналов двойной поляризации могут быть легко обобщены на случай использования операции дополнительного стробирования отсчетов АЦП. Для этого достаточно в качестве элементов матриц  $F_H$ ,  $F_V$  рассматривать произведения АЧХ фильтров БПФ и АЧХ цифровых фильтров формирования квадратур сигналов.

### *Синтез методов анализа потенциальной точности многокоординатных радиолокационных измерений*

Анализ точности измерения параметров сигналов, как известно, может осуществляться с помощью различных подходов, базирующихся на аналитической оценке потенциально достижимых дисперсий ошибок оценивания. Пожалуй, наиболее полный обзор их приведен в [2]. В частности, там отмечается возможность применения системы нижних границ Баранкина, Бхаттачария, Крамера-Рао и других.

Нижняя граница Бхаттачария предложена в 1946 г. Следует отметить, что первый ее порядок совпадает с границей Крамера-Рао [2], а при втором порядке и выше ( $k \geq 2$ ) отличается от нее более сложными зависимостями, связанными с необходимостью обращения матрицы в  $k$  раз большей размерности. При этом сама граница Бхаттачария  $k$ -го порядка проходит выше границы Кра-

мера-Рао и соответствует оценкам, обращающим в ноль частную производную  $k$ -го порядка от решающей функции в точке ее экстремума.

Нижняя граница Баранкина (предложена в 1949 г.) характеризует дисперсию локально наилучшей оценки в заданной точке при условии несмещенности оценки в конечном числе заданных точек. Как отмечено в [2], наиболее важным и практически нерешенным вопросом, возникающим при применении границ Баранкина, является выбор указанного множества точек контроля. На практике эти точки, конечно, могут быть выбраны равномерно в диапазоне возможных изменений интересующего параметра [2]. Однако такой произвол не всегда уместен. Другим сложным вопросом при расчете границы Баранкина является необходимость решения системы интегральных уравнений, порядок которой соответствует количеству контрольных точек. Существенно, что из соотношения Баранкина также может быть получена как предельный частный случай граница Крамера-Рао. При этом, согласно [73], нижняя граница Баранкина всегда будет больше или равна нижней границе Крамера-Рао (НГКР).

Важно подчеркнуть, что применение нижней границы Крамера-Рао возможно лишь при превышении отношением сигнал-шум некоторого порогового уровня (см. рис. 4.10 [79]). Участок, обозначенный на рис. 4.10 как Non-Information, характеризует отсутствие возможности получения состоятельных оценок искомого параметра. В силу сказанного, на практике необходимо учитывать, что для проверки справедливости полученных значений НГКР требуется обеспечить достаточное превышение амплитуд сигналов над СКО шумов измерения.

Аналогичный эффект наблюдается и в отношении упоминавшихся границ Бхаттачария и Баранкина (рис. 4.11 [79]), хотя поведение последней в области сверхмалых значений сигнал-шум более адекватно реагирует на потерю работоспособности измерительной процедуры.

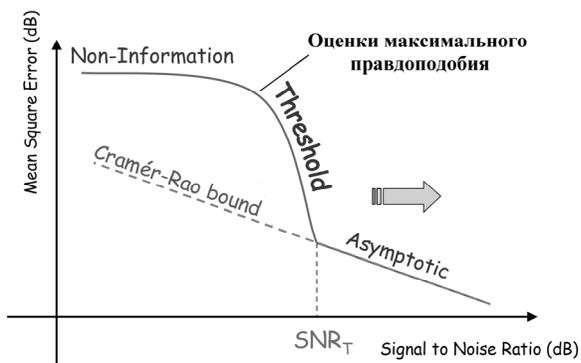


Рис. 4.10. Нижняя граница Крамера–Рао не соответствует СКО реальных оценок максимального правдоподобия при отношениях сигнал-шум, меньших некоторого порогового уровня

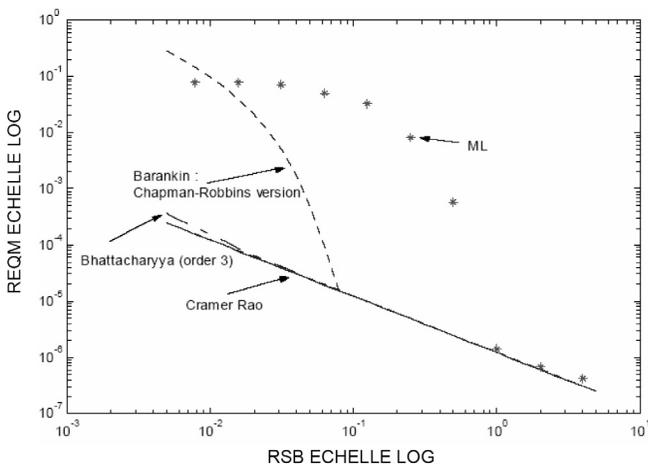


Рис. 4.11. Поведение нижних границ Бхаттачария третьего порядка и Баранкина (по версии Чепмена–Роббинса) в области малых отношений сигнал-шум

К настоящему времени получен ряд более строгих границ, которые существенно ближе описывают реальный характер изменения значения СКО оценок в области малых отношений сигнал-

шум. Таковыми являются статистические границы Зива–Закаи (Ziv-Zakai) (рис. 4.12 [77]), Вайса–Вайншейна (Weiss-Weinstein), Абеля [78] (рис. 4.13, [78]) и их модификации [77, 78]. Однако следует отметить, что в области асимптотической эффективности детерминистской границы Крамера-Рао указанные статистические пределы СКО от нее практически не отличаются.

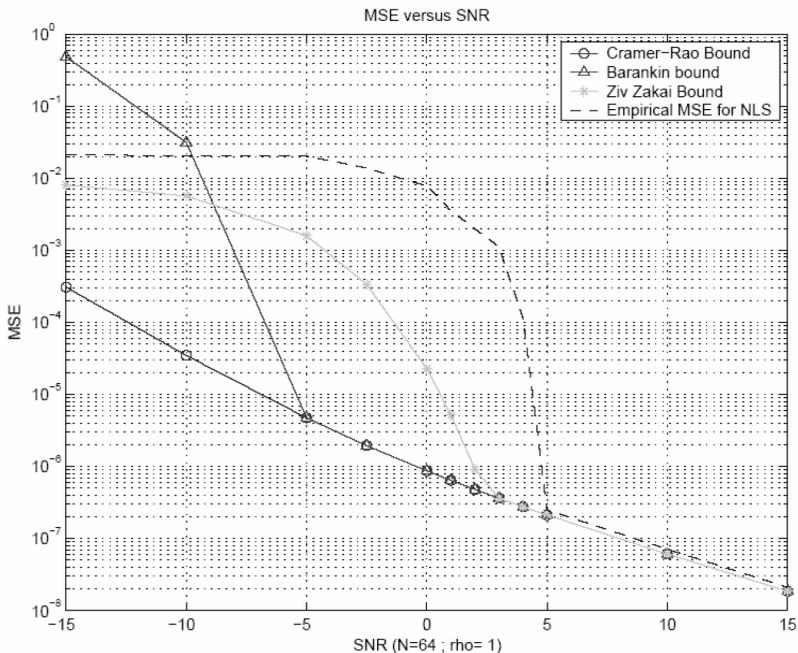


Рис. 4.12. Нижняя граница Зива–Закаи в области малых отношений сигнал-шум лучше соответствует экспериментальным данным, чем границы Баранкина и Крамера–Рао

В целом можно заключить, что для решения задачи оценки дисперсий параметров радиолокационных сигналов, синтезированных в рамках метода максимального правдоподобия в предположении о некоррелированности гауссовых шумов, выбор в

пользу границы Крамера–Рао может быть однозначным. Для этого регулярного случая границы Бхаттачария, Баранкина и другие дадут совпадающий с НГКР результат в области энергетик сигналов, соответствующих задаче измерения координат целей с приемлемой точностью.

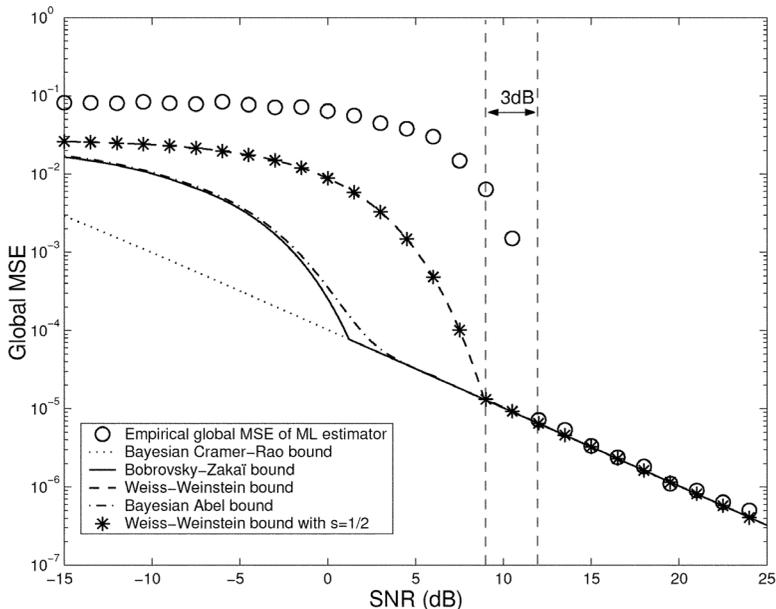


Рис. 4.13. Соотношения различных пределов в области малой энергетике сигналов

Неравенство Крамера–Рао широко известно и наиболее часто применяется на практике в силу сравнительной простоты его получения. Согласно [2], оно было сформулировано Фишером в 1922 г. и затем независимо доказано Дюуга (1937 г.), Эйткином и Сильверстоуном (1942 г.), Фреше (1942 г.), Рао (1945 г.) и Крамером (1946 г.).

Вычисление НГКР для минимально достижимых дисперсий ошибок измерения непосредственно связано с обращением ин-

формационной матрицы Фишера, поэтому формирование таковой можно считать ключевой процедурой для всего процесса определения нижней границы Крамера–Рао. Последующее же обращение информационной матрицы относится к числу тривиальных операций и поддается автоматическому выполнению даже в табличном редакторе MS Excel, не говоря уж о таких специализированных пакетах, как Mathcad или MatLab.

Особое значение анализ потенциальной точности имеет при синтезе измерительных процедур и анализе их на предмет возможной реализации. К настоящему времени в статистике накоплено достаточно методов, позволяющих решать указанную задачу как для скалярных, так и векторных либо матричных параметров. Вместе с тем, применительно к последним при формировании информационной матрицы Фишера зачастую используется тривиальное поэлементное дифференцирование функционалов правдоподобия или их логарифмов, что при большом количестве оцениваемых параметров сопряжено с проведением непомерно громоздких математических выкладок.

С учетом этого представляет интерес использование преимуществ аппарата матричного дифференцирования для упрощения процедуры формирования информационной матрицы Фишера. Тем более, что прогресс в развитии теории матричной производной сделал ее сравнительно доступной для различного рода приложений, чему свидетельством является монография [11]. Не вдаваясь в детали, следует отметить, что в [11] приведен обширный перечень приемов и свойств матричного дифференцирования касательно производных Нойдеккера и Мак–Раэ, а также дан сравнительный их анализ на характерных примерах. Однако, среди них отсутствует рассмотрение задачи формирования информационной матрицы Фишера. Последовательное же использование при этом любой из указанных производных, как выяснилось, приводит к конечным результатам, неудобным для восприятия и анализа в силу их чрезвычайной громоздкости.

Положительно решить данную проблему позволяет предложенная автором методика, учитывающая скалярность дифференцируемых логарифмических функционалов правдоподобия. Принимая во внимание ее исключительную методологическую значимость, остановимся на изложении деталей таковой подробнее.

Действительно, в каком бы виде не были представлены оцениваемые параметры: векторном либо матричном, – логарифмический функционал правдоподобия, по определению, всегда будет скалярной величиной. Поэтому при нахождении его первой производной по матричному аргументу имеет смысл воспользоваться подходом, предложенным Мыльниковым Ю.В. Будучи ориентированным на дифференцирование скалярных функций, такой вариант позволяет сравнительно просто получать компактную запись первых производных и превосходит, с этой точки зрения, аналогичную процедуру И. Барда [3].

Поскольку первые производные уже не являются скалярной величиной, для нахождения вторых производных аппарат Мыльникова Ю.В. не пригоден. Дальнейшие выкладки предлагается выполнять, воспользовавшись одним из упомянутых выше методов дифференцирования [11]. Хотя, в принципе может быть применен любой из двух типов производных, в интересах сокращения выкладок в рамках предлагаемой методики предпочтение отдано производной Нойдеккера как менее трудоемкой в вычислении. Суть ее, согласно [11], как уже отмечалось, может быть представлена в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial (\text{vec } X)^T} \otimes (\text{vec } Y), \quad (4.182)$$

где для  $r \times s$ -матрицы  $Y$  оператор  $\text{vec } Y$  обозначает  $rs$ -вектор, составленный из столбцов матрицы  $Y$ , поставленных один под другим в естественном порядке, то есть  $\text{vec } Y = [y_{11}, \dots, y_{r1}, y_{12}, \dots, y_{r2}, \dots, y_{rs}]^T$ ;

$$\frac{\partial}{\partial(\text{vec } X)^T} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{12}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \right]^T.$$

Помимо относительного удобства нахождения, другим существенным преимуществом производной Нойдеккера следует признать возможность сохранения с ее помощью привычного упорядочения в блочной структуре матрицы Фишера на уровне элементов блоков, когда при ее обращении на главной диагонали располагаются дисперсии ошибок измерения. Производная Мак-Раэ, формируемая согласно [11] так, что ее  $ij$ -й блок имеет вид

$$\left[ \frac{\partial Y}{\partial X} \right]_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{12}} & \dots & \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{1q}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{p_1}} & \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{p_2}} & \dots & \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{pq}} \end{bmatrix}, \quad (4.183)$$

$i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s$ , таким свойством не обладает.

Для того чтобы реализовать указанную возможность, результат первой производной по Мыльникову перед дифференцированием по Нойдеккеру следует подвергнуть комплексно-сопряженному или обычному транспонированию, в зависимости от комплексного или вещественного характера элементов дифференцируемого матричного выражения. Такой прием позволяет состыковать разнородные этапы выкладок в единую цепь.

Говоря о блочном представлении информационной матрицы, необходимо также указать, что с целью все той же минимизации вычислений в предлагаемой методике рекомендуется ограничиться нахождением лишь тех блоков матрицы Фишера, которые расположены на главной диагонали и, например, справа от нее. Оставшаяся часть матрицы легко находится комплексно-сопряженным транспонированием полученных внедиагональных фраг-

ментов. В основе данного приема лежит учет особенностей структуры матрицы Фишера, и он, в общем-то, известен.

В качестве иллюстрации изложенной методики получим матрицу Фишера для оценки точности многосигнальной некогерентной пеленгации линейной цифровой антенной решеткой. Задачу облегчим тем, что соответствующий логарифмический функционал правдоподобия запишем для единичной ковариационной матрицы шумов:

$$L = \text{tr} \left\{ \left[ U - Q(X)A \right]^* \left[ U - Q(X)A \right] \right\}, \quad (4.184)$$

где знак "\*" означает комплексно-сопряженное транспонирование;

$$U = \begin{bmatrix} \dot{U}_{11} & \dot{U}_{12} & \cdots & \dot{U}_{1S} \\ \dot{U}_{21} & \dot{U}_{22} & \cdots & \dot{U}_{2S} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{U}_{R1} & \dot{U}_{R2} & \cdots & \dot{U}_{RS} \end{bmatrix} -$$

матрица комплексных напряжений  $R$  приемных каналов в  $S$  временных отсчетах;  $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_M]^T$  – вектор угловых координат  $M$  источников;

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{Q}_1(x_1) & \dot{Q}_1(x_2) & \cdots & \dot{Q}_1(x_M) \\ \dot{Q}_2(x_1) & \dot{Q}_2(x_2) & \cdots & \dot{Q}_2(x_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_R(x_1) & \dot{Q}_R(x_2) & \cdots & \dot{Q}_R(x_M) \end{bmatrix} - \text{ матрица значений}$$

комплексных ХН  $R$  приемных каналов в направлениях  $M$  источников;

$$A = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \cdots & \dot{a}_{1S} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \cdots & \dot{a}_{2S} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{a}_{M1} & \dot{a}_{M2} & \cdots & \dot{a}_{MS} \end{bmatrix} -$$

матрица комплексных амплитуд  $M$  сигналов в  $S$  временных отсчетах.

Выполнив дифференцирование  $L$  как скалярной функции, после комплексно-сопряженного транспонирования получим:

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial A} \right]^* = -2 \cdot Q^*(X)[U - Q(X)A];$$

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial X} \right]^* = -2 \cdot \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* [U - Q(X)A] \cdot A^*. \quad (4.185)$$

В последнем выражении производную функции  $Q(X)$  следует трактовать как вектор-столбец, а не как вектор-строку. Дело в том, что в данном случае матрица  $Q(X)$  фактически представляет собой функцию не от вектора  $X$ , а от вектор-строки  $X^T$ . При этом, в случае  $M$  источников

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} Q_1'(x_1) & & & \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ Q_R'(x_1) & & & \\ \hline 0 & Q_1'(x_2) & & \\ & \vdots & \dots & 0 \\ & Q_R'(x_2) & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & Q_1'(x_M) \\ & & & \vdots \\ & & & Q_R'(x_M) \end{bmatrix}, \quad (4.186)$$

где  $0$  – блочный ноль.

Характерно, что такая запись полностью совпадает с производной матрицы  $Q(X)$  по Нойдеккеру.

Далее, используя свойства процедуры Нойдеккера [11], найдем математические ожидания вторых производных скаляра (4.184):

$$E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial A^2}\right] = 2 \cdot \frac{\partial[Q^*(X) \cdot Q(X) \cdot A]}{\partial A} = 2 \cdot (1_s \otimes [Q^*(X) \cdot Q(X)]), \quad (4.187)$$

где  $1_s$  – единичная матрица размерности  $S \times S$ ,  $S$  – количество отсчетов;

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial A \partial X}\right] &= E\left[-2 \frac{\partial[Q^*(X)U]}{\partial X} + 2 \frac{\partial[Q^*(X)Q(X)A]}{\partial X}\right] = \\ &= 2 \cdot (A^* \otimes Q^*(X)) \cdot \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \end{aligned}, \quad (4.188)$$

где  $\frac{\partial Q(X)}{\partial X}$  соответствует выражению (4.184);

$$E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial X^2}\right] = 2 \cdot \left[\frac{\partial Q(X)}{\partial X}\right]^* (AA^* \otimes 1_R \cdot) \frac{\partial Q(X)}{\partial X}, \quad (4.189)$$

где  $1_R$  – единичная матрица размерности  $R \times R$ .

Что касается выражения для  $E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial X \partial A}\right]$ , то его несложно получить, применив комплексно-сопряженное транспонирование блока (4.188):

$$E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial X \partial A}\right] = \left[E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial A \partial X}\right]\right]^* = 2 \left[\frac{\partial Q(X)}{\partial X}\right]^* (A \otimes Q(X)). \quad (4.190)$$

В данном случае использовано свойство прямого произведения матриц [11]  $(A \otimes Q(X))^T = A^T \otimes Q^T(X)$ .

С учетом выражений (4.186) – (4.190) матрица Фишера может быть сформирована следующим образом:

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \begin{array}{c|c} 1_s \otimes [Q^*(X) \cdot Q(X)] & (A^* \otimes Q^*(X)) \cdot \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \\ \hline \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (A \otimes Q(X)) & \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (AA^* \otimes 1_R) \cdot \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \end{array} \right]. \quad (4.191)$$

Такая компактная ее запись, принимая во внимание работы, предшествовавшие ее публикации, в частности [10], получена впервые.

Завершая выкладки, остается привести конкретные значения блоков матрицы (4.191):

$$1_s \otimes [Q^*(X) \cdot Q(X)] = \begin{bmatrix} Q^*(X) \cdot Q(X) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q^*(X) \cdot Q(X) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q^*(X) \cdot Q(X) \end{bmatrix}; \quad (4.192)$$

$$Q^*(X) \cdot Q(X) = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^R Q_r^2(x_1) & \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_1) \dot{Q}_r(x_2) & \cdots & \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_1) \dot{Q}_r(x_M) \\ \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_2) \dot{Q}_r(x_1) & \sum_{r=1}^R Q_r^2(x_2) & \cdots & \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_2) \dot{Q}_r(x_M) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_M) \dot{Q}_r(x_1) & \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_M) \dot{Q}_r(x_2) & \cdots & \sum_{r=1}^R Q_r^2(x_M) \end{bmatrix}; \quad (4.193)$$

$$(A^* \otimes Q^*(X)) \frac{\partial Q(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} a_{11}^* P_1 & a_{21}^* P_2 & \cdots & a_{M1}^* P_M \\ a_{12}^* P_1 & a_{22}^* P_2 & \cdots & a_{M2}^* P_M \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1S}^* P_1 & a_{2S}^* P_2 & \cdots & a_{MS}^* P_M \end{bmatrix};$$

$$P_j = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_1) Q_r'(x_j) \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^R Q_r^*(x_M) Q_r'(x_j) \end{bmatrix}; \quad (4.194)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (A \otimes Q(X)) = \\ & = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} P_1^* & \dot{a}_{12} P_1^* & \cdots & \dot{a}_{1S} P_1^* \\ \dot{a}_{21} P_2^* & \dot{a}_{22} P_2^* & \cdots & \dot{a}_{2S} P_2^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{a}_{M1} P_M^* & \dot{a}_{M2} P_M^* & \cdots & \dot{a}_{MS} P_M^* \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.195)$$

$$P_j^* = \left[ \sum_{r=1}^R Q_r'(x_j) Q_r(x_1) \mid \cdots \mid \sum_{r=1}^R Q_r'(x_j) Q_r(x_M) \right]; \quad (4.196)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (A A^* \otimes 1_R) \frac{\partial Q(X)}{\partial X} = \\ & = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^S a_{1s}^2 \sum_{r=1}^R Q_r'^2(x_1) & \cdots & \sum_{s=1}^S a_{Ms}^* \dot{a}_{1s} \sum_{r=1}^R Q_r'(x_1) Q_r'(x_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{s=1}^S \dot{a}_{Ms} a_{1s}^* \sum_{r=1}^R Q_r'(x_M) Q_r'(x_1) \cdots & \cdots & \sum_{s=1}^S a_{Ms}^2 \sum_{r=1}^R Q_r'^2(x_M) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.197)$$

В заключение следует подчеркнуть, что для исследования влияния начальной фазы сигналов на окончательное значение нижней границы Крамера-Рао необходимо предусмотреть переход в (4.191) к квадратурным составляющим матричных блоков. Учитывая общеизвестность такого приема, в дальнейшем для со-

кращения выкладок будет рассматриваться только комплексная трактовка блоков матрицы Фишера.

Полученное выражение информационной матрицы (4.191) является довольно общим и оказывается пригодным не только для многосигнальной, но и односигнальной пеленгации, задач доплеровской селекции, измерения дальности, а также совместного оценивания указанных параметров, в том числе в рамках процедур сверхразрешения. Для этого достаточно лишь соответствующим образом интерпретировать компоненты матриц  $U$ ,  $Q(X)$  и  $A$ , что будет неоднократно продемонстрировано далее. Применительно к дальномерным задачам соответствующие оценки точности приведены в [47].

При учете в исходном функционале правдоподобия (4.184) произвольной корреляционной матрицы шумов, приведенные выражения для блоков матрицы Фишера усложняются. В качестве примера рассмотрим по-прежнему пеленгационную задачу, ограничившись на этот раз одноотсчетным измерением угловых координат  $M$  источников. При такой постановке вопроса логарифмический эквивалент функционала правдоподобия можно выразить в виде

$$L = \text{tr}\{[U - Q(X)A]^* B^{-1}[U - Q(X)A]\}. \quad (4.198)$$

Следуя изложенной методике, проведем дифференцирование скаляра (4.198), по неизвестным векторам амплитуд  $M$  источников  $A$  и их угловых координат  $X$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A} &= \frac{\partial \text{tr}[U - Q(X)A]^* B^{-1}[U - Q(X)A]}{\partial [U - Q(X)A]} \frac{\partial [U - Q(X)A]}{\partial A} = \\ &= -2[U - Q(X)A]^* B^{-1}Q(X). \end{aligned} \quad (4.199)$$

По аналогии несложно получить

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial \text{tr}[U - Q(X)A]^* B^{-1}[U - Q(X)A]}{\partial [U - Q(X)A]} \cdot \frac{\partial [U - Q(X)A]}{\partial X} \cdot \frac{\partial Q(X)}{\partial X} =$$

$$= -2A[U - Q(X)A]^* B^{-1} \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]. \quad (4.200)$$

После дифференцирования по Нойдеккеру транспонированных выражений (4.199) и (4.200) результирующие вторые производные от L и их математические ожидания примут вид:

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial A^2} \right] &= \frac{\partial^2 L}{\partial A^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{\partial [Q^*(X) \cdot B^{-1} Q(X) \cdot A]}{\partial A} = 2 \cdot [Q^*(X) \cdot B^{-1} \cdot Q(X)]; \end{aligned} \quad (4.201)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial A \partial X} &= -2 \frac{\partial [Q^*(X) \cdot B^{-1} \cdot [U - Q(X) \cdot A]]}{\partial X} = \\ &= -2 \frac{\partial [Q^*(X)]}{\partial X} \cdot B^{-1} U + 2 \frac{\partial [Q^*(X)]}{\partial X} B^{-1} Q(X) A + \\ &\quad + 2 Q^*(X) B^{-1} \frac{\partial [Q(X) A]}{\partial X}, \end{aligned} \quad (4.202)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial A \partial X} \right] &= 2 Q^*(X) B^{-1} \frac{\partial [Q(X) A]}{\partial X} = \\ &= 2 (A^* \otimes Q^*(X) B^{-1}) \cdot \frac{\partial Q(X)}{\partial X}; \end{aligned} \quad (4.203)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial A} \right] = \left[ E \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial A \partial X} \right] \right]^* = 2 \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (A \otimes B^{-1} \cdot Q(X)); \quad (4.204)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial X^2} &= -2 \frac{\partial \left[ \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* \cdot B^{-1} \cdot [U - Q(X) \cdot A] \cdot A^* \right]}{\partial X} = \\
&= -2 \frac{\partial \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^*}{\partial X} \cdot B^{-1} U \cdot A^* + \\
&+ 2 \frac{\partial \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^*}{\partial X} \cdot B^{-1} \cdot Q(X) \cdot A \cdot A^* + \\
&+ 2 \cdot \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* \cdot B^{-1} \cdot \frac{\partial [Q(X) \cdot A A^*]}{\partial X}; \quad (4.205)
\end{aligned}$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \right] = 2 \cdot \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (A A^* \otimes B^{-1}) \frac{\partial Q(X)}{\partial X}. \quad (4.206)$$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \times \begin{bmatrix} Q^*(X) B^{-1} Q(X) & (A^* \otimes Q^*(X) \cdot B^{-1}) \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \\ \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (A \otimes B^{-1} Q(X)) & \left[ \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right]^* (A A^* \otimes B^{-1}) \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \end{bmatrix}. \quad (4.207)$$

Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом случае корреляционная матрица  $B$  не зависит от количества источников. Ее размерность составляет  $R \times R$ , и элементы определяются исключительно межканальной корреляцией шумов в единичном отсчете, а

не смесью сигналов с шумами, что имеет место в известных процедурах спектрального оценивания.

Применительно к одноцелевой дальномерной задаче, решаемой на основе многочастотного подхода, матрица  $Q(X)$  может быть выражена через дискретные функции огибающих радиоимпульсов и частоты их заполнения:

$$Q(X) = \begin{bmatrix} K_1(0) & K_2(0) & \dots & K_R(0) \\ K_1(1) \cdot e^{j\omega_1 \Delta t} & K_2(1) \cdot e^{j\omega_2 \Delta t} & \dots & K_R(1) \cdot e^{j\omega_R \Delta t} \\ K_1(2) \cdot e^{2j\omega_1 \Delta t} & K_2(2) \cdot e^{2j\omega_2 \Delta t} & \dots & K_R(2) \cdot e^{2j\omega_R \Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_1(N-1) \cdot e^{(N-1)j\omega_1 \Delta t} & K_2(N-1) \cdot e^{(N-1)j\omega_2 \Delta t} & \dots & K_R(N-1) \cdot e^{(N-1)j\omega_R \Delta t} \end{bmatrix}.$$

При этом предполагается, что все сигналы имеют одинаковую длительность ( $N$  отсчетов АЦП), равные амплитуды и различия по времени задержки, не превышающие период дискретизации. В результате для одиночного источника, когда вектор амплитуд вырождается в комплексный скаляр, минимизация (4.198) приводит к информационной матрице Фишера

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \times \begin{bmatrix} \text{tr} [Q^*(X) \cdot B^{-1} \cdot Q(X)] & a^* \cdot \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right)^* \cdot B^{-1} \cdot Q(X) \right] \\ a \cdot \text{tr} \left[ Q^*(X) \cdot B^{-1} \cdot \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right] & a^2 \cdot \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right)^* \cdot B^{-1} \cdot \frac{\partial Q(X)}{\partial X} \right] \end{bmatrix}, \quad (4.208)$$

где "tr" – символ операции взятия следа от матрицы.

## *Информационная матрица Фишера для моделей систем, базирующихся на торцевых произведениях матриц*

В современной радиолокации одной из важнейших проблем является аналитическая оценка предельно достижимой точности многокоординатных измерений в многосигнальных ситуациях. Отсутствие таковой вынуждает разработчиков проводить анализ точностных свойств конкурирующих методов обработки путем статистического моделирования [15]. Данный путь предполагает значительные вычислительные затраты, особенно, если в ходе анализа требуется исчерпать весь набор возможных ситуаций приема. Поэтому актуальной является разработка метода формирования нижней границы Крамера–Рао, позволяющего аналитически оценить потенциально достижимую точность измерений в многокоординатных РЛС на базе ЦАР.

Отправной точкой предлагаемого подхода является представление аналитической модели анализируемой многокоординатной радиолокационной системы с помощью торцевых произведений матриц [45]. Как отмечалось в [45], при выводе нижней границы Крамера–Рао в случае  $M$  источников только таким путем удастся использовать известные наработки, соответствующие односигнальной монопараметрической ситуации приема. Указанный путь существенно упрощает решение рассматриваемой задачи, хотя одного лишь перехода к моделям на базе торцевых произведений матриц недостаточно, поскольку главная трудность, связанная с большой размерностью результатов матричного дифференцирования, все же остается.

В этой связи представляет интерес дальнейшее развитие аппарата торцевых умножений матриц, направленное на автоматизацию процесса формирования их многомерной матричной производной, а также снижение размерности вычислений в процессе вывода окончательной записи информационной матрицы Фишера, по которой строится нижняя граница точности.

Целью дальнейшего изложения является рассмотрение методики формирования матрицы Фишера для аналитических моделей радиолокационных систем, основанных на матричном произведении Хатри–Рао [45, 46].

Как отмечалось выше, информационная матрица Фишера может быть получена на основе матричной производной Нойдеккера [11]. При этом общий вид матрицы Фишера (4.191) может быть использован и для формирования нижней границы Крамера–Рао, достижимой многокоординатной одно- либо многопозиционной радиолокационной системой в многосигнальной ситуации. Достаточно, как было указано, в [45], подставить в (4.191) вместо матрицы  $Q(X)$  соответствующее торцевое произведение матриц  $P$  и должным образом отрегулировать размерность единичных матриц.

Дальнейшее упрощение процедуры формирования матрицы Фишера в рассматриваемом классе задач базируется на свойстве факторизации производной Нойдеккера от ПХР, рассмотренном ранее. В частности, для 2-координатной одноотсчетной модели ЦАР, которой соответствует произведение Хатри–Рао матриц  $P$  вида (4.57), блоки матрицы Фишера, находящиеся вне главной диагонали, с учетом указанного свойства, могут быть представлены в виде [50]:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot (A \otimes P) = [\partial F_y^T \oplus \partial Q_y^T] \cdot [A \otimes (F \blacksquare Q)]; \quad (4.209)$$

$$(A^* \otimes P^T) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = [A^* \otimes (F^T \blacksquare Q^T)] \cdot [\partial F_y \bullet \partial Q_y], \quad (4.210)$$

где  $\partial F_y = \begin{bmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \\ \hline F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} \end{bmatrix}$ ;  $\partial Q_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & Q_1 \\ \hline \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} & Q_2 \end{bmatrix}$ ;  $F_1 = \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ F_T(\omega_1) & 0 \end{bmatrix}$ ;

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & F_1(\omega_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & F_T(\omega_2) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_T(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial F_1(\omega_2)}{\partial \omega_2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial F_T(\omega_2)}{\partial \omega_2} \end{bmatrix};$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & 0 \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & Q_1(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & Q_R(x_2) \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1(x_1)}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_R(x_1)}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial Q_1(x_2)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial Q_R(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

В результате использования теорем (4.35) – (4.37) удалось установить, что соотношения (4.209), (4.210) сводятся к произведениям Адамара (все последующие зависимости ввиду чрезвычайной громоздкости выкладок будут даны без развернутых доказательств):

$$\left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T \cdot (A \otimes P) = [\partial F_Y^T \cdot (A \otimes F)] \circ [\partial Q_Y^T \cdot (1_M \otimes Q)]; \quad (4.211)$$

$$(A^* \otimes P^T) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = [(A^* \otimes F^T) \cdot \partial F_Y] \circ [(1_M^T \otimes Q^T) \cdot \partial Q_Y], \quad (4.212)$$

где  $1_M$  – вектор или матрица единичных амплитуд, совпадающие по размерности с вектором (матрицей) амплитуд  $A$ . В данном случае для  $M$  сигналов имеем  $M$ -вектор единиц  $1_M = [1 \dots 1]^T$ .

Понижение размерности блочных выражений путем сведения их к произведениям Адамара позволяет существенно упростить как прочтение результирующих выражений блоков матрицы Фишера, так и вывод их окончательной записи, пригодной для численных расчетов на ЭВМ. Особенно эффективность такого подхода проявляется в задачах анализа точности многокоординатных РЛС.

Для правого нижнего блока матрицы Фишера факторизуемость производной  $\frac{\partial P}{\partial Y}$ , как отмечалось в [50], также порождает тождество, аналогичное (4.211), (4.212). Следует отметить, что прежде вывод окончательной записи для этого блока вызывал особенно большие трудности в виду громоздкости аналитических выкладок. Отныне эту процедуру можно упростить, если учесть, что [50]

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot (AA^* \otimes 1_{RT}) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = [\partial F_y^T \ominus \partial Q_y^T] \cdot [AA^* \otimes 1_{RT}] \cdot [\partial F_y \ominus \partial Q_y] =$$

$$= [\partial F_y^T (AA^* \otimes 1_T) \cdot \partial F_y] \circ [\partial Q_y^T (1_M 1_M^T \otimes 1_R) \cdot \partial Q_y]. \quad (4.213)$$

Наконец, остается рассмотреть наиболее простой блок матрицы Фишера – левый верхний. В случае одноотсчетных измерений в нем отпадает необходимость в кронекеровском произведении, поэтому, применяя теорему 1 (4.35), несложно получить

$$P^T \cdot P = (S^T \square F^T) \cdot (S \blacksquare F) = (S^T \cdot S) \circ (F^T \cdot F). \quad (4.214)$$

Представленные результаты следует расценивать как основу для последующего упрощения анализа информационных матриц Фишера, соответствующих моделям систем, базирующимся на блочных произведениях Хатри-Рао, в частности, многопозиционных РЛС на базе многосекционных ЦАР. Поскольку их рассмотрение заслуживает особого внимания, остается отметить, что

производная Нойдеккера от блочного ПХР также обладает свойством факторизации, что позволяет упростить запись соответствующих матриц Фишера в объемах, аналогичных рассмотренным выше, и для многопозиционных РЛС на базе ЦАР.

*Метод анализа потенциальной  
точности многокоординатных  
радиолокационных измерений*

Алгоритм формирования матричной производной при совместном оценивании более двух координат удобно рассмотреть на примере четырехкоординатной модели импульсной РЛС на базе ЦАР с факторизуемыми ХНД идентичных приемных каналов [45], когда измерению подлежат угловые координаты совместно с радиальными скоростями и дальностями  $M$  источников:

$$P = Q \cdot V \cdot F \cdot S, \quad (4.215)$$

где  $Q$  и  $V$  суть  $R \times M$  – матрицы, а  $F$  и  $S$  имеют соответственно размерности  $T \times M$  и  $G \times M$ ; символ " $\cdot$ " по-прежнему означает операцию Хатри–Рао.

По аналогии с [45], применительно к плоской эквидистантной ЦАР матрицы  $Q$  и  $V$  можно трактовать как  $R \times M$ –матрицы значений характеристик направленности  $R$  приемных каналов в направлениях  $M$  источников в азимутальной и угломестной плоскостях соответственно,  $F$  – как  $T \times M$ –матрицу откликов  $T$  синтезированных частотных фильтров на частотах  $M$  сигналов, а  $S$  – как аналогичную  $G \times M$ – матрицу сигнальных характеристик  $G$  стробов дальности. При этом в отсутствие шумов набор выходных напряжений приемных каналов ЦАР может быть записан в виде  $U = P \cdot A$ , где  $A = [\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_M]^T$  – вектор комплексных амплитуд сигналов. При воздействии двух источников сигналов, к примеру,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & Q_1(x_2) \\ Q_2(x_1) & Q_2(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) & Q_R(x_2) \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) \\ \vdots & \vdots \\ V_R(y_1) & V_R(y_2) \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) & F_1(\omega_2) \\ F_2(\omega_1) & F_2(\omega_2) \\ \vdots & \vdots \\ F_T(\omega_1) & F_T(\omega_2) \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_1(z_1) & S_1(z_2) \\ S_2(z_1) & S_2(z_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_G(z_1) & S_G(z_2) \end{bmatrix};$$

$$P = Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_1(x_1) \begin{bmatrix} V_1(y_1) \\ \vdots \\ V_R(y_1) \end{bmatrix} & Q_1(x_2) \begin{bmatrix} V_1(y_2) \\ \vdots \\ V_R(y_2) \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ Q_R(x_1) \begin{bmatrix} V_1(y_1) \\ \vdots \\ V_R(y_1) \end{bmatrix} & Q_R(x_2) \begin{bmatrix} V_1(y_2) \\ \vdots \\ V_R(y_2) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \blacksquare$$

$$\blacksquare \begin{bmatrix} F_1(\omega_1) \begin{bmatrix} S_1(z_1) \\ \vdots \\ S_G(z_1) \end{bmatrix} & F_1(\omega_2) \begin{bmatrix} S_1(z_2) \\ \vdots \\ S_G(z_2) \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ F_T(\omega_1) \begin{bmatrix} S_1(z_1) \\ \vdots \\ S_G(z_1) \end{bmatrix} & F_T(\omega_2) \begin{bmatrix} S_1(z_2) \\ \vdots \\ S_G(z_2) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

(4.216)

При этом нижняя граница Крамера–Рао запишется в виде

$$I = \sigma^2 \cdot \left[ \begin{array}{c|c} P^T \cdot P & (A^* \otimes P^T) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} \\ \hline \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T \cdot (A \otimes P) & \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T \cdot (AA^* \otimes I_{\text{RRTG}}) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} \end{array} \right]^{-1}, \quad (4.217)$$

где  $\partial P / \partial Y$  – производная Нойдеккера [11] от матрицы  $P$  по вектору  $Y$ , проблема вычисления которой и является камнем преткновения ( $Y$  составлен из неизвестных параметров сигналов  $M$  источников);  $I_{\text{RRTG}}$  – единичная матрица размерности  $R \times R \times T \times G$ .

Как отмечалось ранее, процесс нахождения  $\partial P / \partial Y$  легко поддается автоматизации с помощью ЭВМ. При этом в качестве исходных данных должны использоваться элементы сомножителей, образующих блочную матрицу  $P$ .

Напомним, что в основе вычислительного алгоритма лежит неоднократно уже рассматривавшееся выше свойство факторизации производной Нойдеккера от ПХР, которое в данном случае запишется в виде

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} (Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) = \partial Q_y \odot \partial V_y \odot \partial F_y \odot \partial S_y, \quad (4.218)$$

где  $\partial Q_y =$  
$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} Q_1 & Q_1 & Q_1 & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \\ \hline Q_2 & Q_2 & Q_2 & \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline Q_M & Q_M & Q_M & \frac{\partial Q_M}{\partial x_M} \end{array} \right];$$

$$\partial V_y = \begin{bmatrix} V_1 & V_1 & \frac{\partial V_1}{\partial y_1} & V_1 \\ \hline V_2 & V_2 & \frac{\partial V_2}{\partial y_2} & V_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline V_M & V_M & \frac{\partial V_M}{\partial y_M} & V_M \end{bmatrix};$$

$$\partial F_y = \begin{bmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} & F_1 & F_1 \\ \hline F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} & F_2 & F_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline F_M & \frac{\partial F_M}{\partial \omega_M} & F_M & F_M \end{bmatrix};$$

$$\partial S_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial z_1} & S_1 & S_1 & S_1 \\ \hline \frac{\partial S_2}{\partial z_2} & S_2 & S_2 & S_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \frac{\partial S_M}{\partial z_M} & S_M & S_M & S_M \end{bmatrix}.$$

Как и в выражении (4.72), блок-столбцы в пределах блочных матриц  $\partial Q_y$ ,  $\partial V_y$ ,  $\partial F_y$ ,  $\partial S_y$ , за исключением блок-столбца производных, тождественны, индексы блоков в них соответствуют номерам ненулевых столбцов, поскольку все остальные элементы

блоков – нулевые, а также номеру источника, чья координата используется в качестве аргумента соответствующей характеристики, в частности для  $S_3$  и  $\frac{\partial S_2}{\partial z_2}$  в матрице  $\partial S_y$  аналогично (4.72)

имеем

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_1(z_3) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & S_G(z_3) & 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial z_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial S_1(z_2)}{\partial z_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial S_G(z_2)}{\partial z_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Столь детальное рассмотрение свойств факторизации нойдекеровской производной на фоне материала первого раздела преследует цель как можно полнее показать возможности, которые предоставляет использование предложенного соискателем подхода.

С учетом сказанного, для четырехкоординатной модели ЦАР, которой соответствует матрица  $P$  (4.215), блоки матрицы Фишера, находящиеся вне главной диагонали могут быть выражены в виде:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T (A \otimes P) = \\ & = [\partial Q_y^T \otimes \partial V_y^T \otimes \partial F_y^T \otimes \partial S_y^T] \cdot [A \otimes (Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S)]; \end{aligned} \quad (4.219)$$

$$\begin{aligned} & (A^* \otimes P^T) \frac{\partial P}{\partial Y} = \\ & = [A^* \otimes (Q^T \blacksquare V^T \blacksquare F^T \blacksquare S^T)] \cdot [\partial Q_y \blacksquare \partial V_y \blacksquare \partial F_y \blacksquare \partial S_y]. \end{aligned} \quad (4.220)$$

Как и в случае (4.209), (4.210), соотношения (4.219), (4.220) сводятся к поэлементным произведениям Адамара:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T (A \otimes P) = \\ & = \left[ \partial Q_y^T (A \otimes Q) \right] \circ \left[ \partial V_y^T (1_M \otimes V) \right] \circ \left[ \partial F_y^T (1_M \otimes F) \right] \circ \left[ \partial S_y^T (1_M \otimes S) \right]; \\ & (A^* \otimes P^T) \frac{\partial P}{\partial Y} = \left[ (A^* \otimes Q^T) \partial Q_y \right] \circ \left[ (1_M^T \otimes V^T) \partial V_y \right] \times \\ & \quad \times \left[ (1_M^T \otimes F^T) \partial F_y \right] \circ \left[ (1_M^T \otimes S^T) \partial S_y \right], \end{aligned} \quad (4.221)$$

где  $1_M$  – все тот же вектор единичных амплитуд, совпадающий по размерности с вектором амплитуд  $A$ .

Для правого нижнего блока матрицы Фишера аналогично (4.213) также существует тождество, использующее факторизуемость производной  $\frac{\partial P}{\partial Y}$ , а именно:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T \cdot (AA^* \otimes 1_{\text{RRTG}}) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = \\ & = \left[ \partial Q_y^T \ominus \partial V_y^T \ominus \partial F_y^T \ominus \partial S_y^T \right] \cdot \left[ AA^* \otimes 1_R \otimes 1_R \otimes 1_T \otimes 1_G \right] \times \\ & \quad \times \left[ \partial Q_y \ominus \partial V_y \ominus \partial F_y \ominus \partial S_y \right], \end{aligned} \quad (4.222)$$

откуда,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^T \cdot (AA^* \otimes 1_{\text{RRTG}}) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = \\ & = \left[ \partial Q_y^T (AA^* \otimes 1_R) \partial Q_y \right] \circ \left[ \partial V_y^T (1_{MM} \otimes 1_R) \partial V_y \right] \circ \\ & \quad \circ \left[ \partial F_y^T (1_{MM} \otimes 1_T) \partial F_y \right] \circ \left[ \partial S_y^T (1_{MM} \otimes 1_G) \partial S_y \right], \end{aligned} \quad (4.223)$$

где  $1_{MM}$  –  $M \times M$ –матрица, все элементы которой равны единице.

При большей размерности матрицы  $P$ , например, когда количество координат, измеряемых в РЛС, превышает четыре, следу-

ет использовать справедливое только для рассматриваемого типа блочных матриц свойство "поглощения" кронекеровских произведений торцевыми

$$\begin{aligned}
 & \left[ G^T \odot N^T \odot D^T \odot L^T \dots \right] \cdot \left[ A A^* \otimes 1_G \otimes 1_N \otimes 1_D \otimes 1_L \dots \right] \times \\
 & \quad \times \left[ G \odot N \odot D \odot L \dots \right] = \\
 & = \left[ G^T (A A^* \otimes 1_G) \cdot G \right] \circ \left[ N^T (1_{MM} \otimes 1_N) \cdot N \right] \circ \\
 & \quad \circ \left[ D^T (1_{MM} \otimes 1_D) \cdot D \right] \circ \left[ L^T (1_{MM} \otimes 1_L) \cdot L \right] \dots \quad (4.224)
 \end{aligned}$$

Наконец, по аналогии с (4.214), несложно получить

$$\begin{aligned}
 P^T P &= (Q^T \square V^T \square F^T \square S^T) \cdot (Q \blacksquare V \blacksquare F \blacksquare S) = \\
 &= (Q^T Q) \circ (V^T V) \circ (F^T F) \circ (S^T S) \quad (4.225)
 \end{aligned}$$

Для нахождения нижней границы Крамера–Рао далее остается лишь произвести автоматическое обращение сформированной матрицы Фишера, используя перечисленные ранее программные средства.

Что касается блочных модификаций торцевых произведений, то руководствуясь проведенными выше выкладками, можно показать, что производная Нойдеккера от таковых также раскладывается на множители. Это свойство довольно важно для решения задач статистического анализа многопозиционных радиолокационных систем, связанного с формированием информационной матрицы Фишера. Поэтому рассмотрим сначала, что представляет собой указанная производная для случая блочных матриц.

Один из подходов, изложенный в [11], касается трактовки производной Нойдеккера в виде  $\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial (\text{vec } X)} \otimes (\text{vec } Y)^T$ . Поскольку она отличается от принятого здесь определения производной (4.182), то дальнейшее ее рассмотрение не проводится.

Что же касается определения (4.182), то для упрощенной модели радиолокационной системы, когда измерению в  $V$  позициях РЛС подлежат одна из угловых координат  $M$  целей и их радиальные скорости, соответствующий вариант факторизованного представления производной в обозначениях (4.210), (4.218) запишется в виде

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} = \partial Q_y \circledast \partial F_y = \begin{bmatrix} Q_{11} & \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{1V} & \frac{\partial Q_{1V}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{M1} & \frac{\partial Q_{M1}}{\partial x_M} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{MV} & \frac{\partial Q_{MV}}{\partial x_M} \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \omega_1} & F_{11} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{1V}}{\partial \omega_1} & F_{1V} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{M1}}{\partial \omega_M} & F_{M1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{MV}}{\partial \omega_M} & F_{MV} \end{bmatrix}. \quad (4.226)$$

Особенностью такой записи является то, что производные в соответствующих блоках  $\partial Q_y$  и  $\partial F_y$  ищутся для всех  $V$  позиций сразу, сначала – по одному компоненту векторного аргумента, а затем – для всех позиций – по другому параметру. В результате группирование блоков в  $\partial Q_y$  и  $\partial F_y$  осуществляется в порядке возрастания индекса элементов вектора  $Y$ . Как выяснилось, такая структура не позволяет использовать для модели (4.56) отработанный в (4.219) – (4.225) механизм упрощения процесса формирования информационной матрицы Фишера, поскольку свойства (4.71) и (4.224) не работают.

В процессе поиска путей разрешения данного противоречия автором была предложена новая, модифицированная запись производной Нойдеккера, суть которой сводится к группированию частных производных по номеру позиции РЛС таким образом, чтобы производные, относящиеся к одинаковым позициям, раз-

мещались в едином блоке. Основанием для модификации стал тот факт, что упорядочение элементов матричной производной является в целом вопросом договоренности [11]. Толчком же к нововведению послужил анализ выражения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} &= \left(\frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y}\right)^T \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} = \\ &= (\partial Q_y \circledast \partial F_y)^T (\partial Q_y \circledast \partial F_y) \end{aligned} \quad (4.227)$$

которое, как оказалось, может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y}\right)^T \cdot \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} &= \\ &= \sum_v \left\{ \partial Q_{yv}^T \cdot \partial Q_{yv} \right\} \circ \left\{ \partial F_{yv}^T \cdot \partial F_{yv} \right\}, \end{aligned} \quad (4.228)$$

где  $v$  – номер позиции РЛС;

$$\partial Q_{yv}^T = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} Q_{1v} & \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \right)_v \\ \hline Q_{2v} & \left( \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \right)_v \\ \vdots & \vdots \\ \hline Q_{Mv} & \left( \frac{\partial Q_M}{\partial x_M} \right)_v \end{array} \right] \end{bmatrix}; \quad \partial F_{yv}^T = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} \left( \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} \right)_v & F_{1v} \\ \hline \left( \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} \right)_v & F_{2v} \\ \vdots & \vdots \\ \hline \left( \frac{\partial F_M}{\partial \omega_M} \right)_v & F_{Mv} \end{array} \right] \end{bmatrix}; \quad (4.229)$$

блоки  $Q_{nv}$ ,  $\left(\frac{\partial Q_n}{\partial x_n}\right)_v$  и  $F_{nv}$ ,  $\left(\frac{\partial F_n}{\partial \omega_n}\right)_v$  ( $n=1, \dots, M$ ) тождественны аналогичным блокам в (4.218).

Учитывая такой ход событий, для рассмотренного 2-координатного примера предложенное толкование производной будет иметь следующий компактный вид

$$\frac{\partial(\overline{Q \circledast F})}{\partial Y} = \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{c} Q_{1v} \\ \vdots \\ Q_{Mv} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \right)_v \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial Q_M}{\partial x_M} \right)_v \end{array} \right] \\ \hline & \circledast \\ \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} \right)_v \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial F_M}{\partial \omega_M} \right)_v \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} F_{1v} \\ \vdots \\ F_{Mv} \end{array} \right] \end{array} \right]_v, \quad (4.230)$$

или через более детальную запись:

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial(\overline{Q \circledast F})}{\partial Y} = \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{c} Q_{11} \\ \vdots \\ Q_{M1} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_{M1}}{\partial x_1} \end{array} \right] \\ \hline & \circledast \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial F_{11}}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{M1}}{\partial \omega_1} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} F_{11} \\ \vdots \\ F_{M1} \end{array} \right] \\ \hline & \circledast \\ \left[ \begin{array}{c} Q_{1v} \\ \vdots \\ Q_{Mv} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial Q_{1v}}{\partial x_M} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_{Mv}}{\partial x_M} \end{array} \right] \\ \hline & \circledast \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial F_{1v}}{\partial \omega_M} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{Mv}}{\partial \omega_M} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} F_{1v} \\ \vdots \\ F_{Mv} \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (4.231)$$

Здесь  $\frac{\partial(\overline{Q \circledast F})}{\partial Y}$  – блочная матрица, каждый из блоков которой представляет собой результат факторизации производной Нойдеккера от блока  $(Q \blacksquare F)_v$  исходного блочного произведения Хатри–Рао двух матриц. Заметим, что в данном случае  $Q \circledast F = (Q \blacksquare F)_v$ , то есть для каждого  $v$ -го блока формируется свое ПХР, что, впрочем, следует из определения (4.51).

Таким образом, применительно к модифицированной производной Нойдеккера можно говорить о следующей трактовке

свойства факторизации производной от блочного произведения Хатри–Рао

$$\frac{\partial(\overline{Q \circledast F})}{\partial Y} = \partial Q_{yv} \circledast \partial F_{yv}, \quad (4.232)$$

где

$$\partial Q_{yv} = \left[ \begin{array}{c|c} Q_{1v} & \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \right)_v \\ \hline Q_{2v} & \left( \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \right)_v \\ \vdots & \vdots \\ \hline Q_{Mv} & \left( \frac{\partial Q_M}{\partial x_M} \right)_v \end{array} \right]; \quad \partial F_{yv} = \left[ \begin{array}{c|c} \left( \frac{\partial F_1}{\partial \omega_1} \right)_v & F_{1v} \\ \hline \left( \frac{\partial F_2}{\partial \omega_2} \right)_v & F_{2v} \\ \vdots & \vdots \\ \hline \left( \frac{\partial F_M}{\partial \omega_M} \right)_v & F_{Mv} \end{array} \right].$$

Весьма существенно, что для исходного и модифицированного типов производной Нойдеккера выполняется тождество

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \cdot \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} &= \left( \frac{\partial(\overline{Q \circledast F})}{\partial Y} \right)^T \cdot \frac{\partial(\overline{Q \circledast F})}{\partial Y} = \\ &= (\partial Q_y \circledast \partial F_y)^T (\partial Q_y \circledast \partial F_y) = (\partial Q_{yv} \circledast \partial F_{yv})^T (\partial Q_{yv} \circledast \partial F_{yv}) = \\ &= \sum_v \left\{ (\partial Q_{yv}^T \cdot \partial Q_{yv}) \circ (\partial F_{yv}^T \cdot \partial F_{yv}) \right\}, \quad (4.233) \end{aligned}$$

позволяющее рассматривать введение новой производной (4.232) как сугубо методический прием, обеспечивающий оперативное получение конечной записи информационной матрицы Фишера с заметным упрощением необходимых для этого промежуточных выкладок.

При этом, в отличие от информационной матрицы, базирующей на традиционной производной Нойдеккера (4.182),

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[ \begin{array}{c|c} (Q \circledast F)^T (Q \circledast F) & (A^* \otimes (Q \circledast F)^T) \cdot \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \\ \hline \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \cdot (A \otimes (Q \circledast F)) & \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \cdot (AA^* \otimes I_{RT}) \cdot \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \end{array} \right], \quad (4.234)$$

тождественная ее запись через нововведенную производную будет следующей:

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[ \begin{array}{c|c} (Q \circledast F)^T (Q \circledast F) & \left( \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \{1_V \otimes A\} [\otimes] (Q \circledast F) \right)^* \\ \hline \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \{1_V \otimes A\} [\otimes] (Q \circledast F) & \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \{1_V \otimes (AA^* \otimes I_{RT})\} \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \end{array} \right], \quad (4.235)$$

где  $1_V$  – единичная матрица размерности  $V \times V$ ;  $1_V$  –  $V$  – вектор единиц.

Учитывая возможность факторизации и прочие свойства торцовых произведений матриц, блочные компоненты (4.235) могут быть переписаны в более удобной для восприятия форме:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \{1_V \otimes A\} [\otimes] (Q \circledast F) = \\ & = \sum_v \left\{ \left( \partial Q_{yv}^T (A \otimes Q_v) \right) \circ \left( \partial F_{yv}^T (1_M \otimes F_v) \right) \right\} \\ & \left( \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} \right)^T \{1_V \otimes (AA^* \otimes I_{RT})\} \frac{\partial(Q \circledast F)}{\partial Y} = \\ & = \sum_v \left\{ \left( \partial Q_{yv}^T (AA^* \otimes I_T) \right) \partial Q_{yv} \right\} \circ \left( \partial F_{yv}^T (1_M 1_M^T \otimes I_R) \partial F_{yv} \right) \end{aligned}, \quad (4.237)$$

где  $\partial Q_{yv}$  и  $\partial F_{yv}$  – факторизованные компоненты производной Нойдеккера от ТБТП для  $v$ -го блока. Символ  $[\otimes]$  соответствует блочному кронекеровскому произведению матриц.

Таким образом, результат (4.236) – (4.237) отличается от 1-позиционного случая только лишь наличием накопления по индексу  $v$  (в соответствии с количеством позиций РЛС).

В более общем случае, когда количество измеряемых координат превышает две, соотношения (4.236) – (4.237) несложно откорректировать, учитывая результаты (4.219) – (4.225). Например, в 4-координатном случае получим

$$\left( \frac{\partial(\overline{Q \bullet V \bullet F \bullet S})}{\partial Y} \right)^T \cdot \{ \{1_v \otimes A\} [\otimes] (Q \bullet V \bullet F \bullet S) \} =$$

$$= \sum_v \left\{ \left[ \begin{array}{l} (\partial Q_{yv}^T (A \otimes Q_v)) \circ (\partial V_{yv}^T (1_M \otimes V_v)) \\ \circ (\partial F_{yv}^T (1_M \otimes F_v)) \circ (\partial S_{yv}^T (1_M \otimes S_v)) \end{array} \right] \right\} ; \quad (4.238)$$

$$\left( \frac{\partial(\overline{Q \bullet V \bullet F \bullet S})}{\partial Y} \right)^T \cdot \{ 1_v \otimes (AA^* \otimes 1_{\text{RRTG}}) \} \cdot \frac{\partial(\overline{Q \bullet V \bullet F \bullet S})}{\partial Y} =$$

$$= \sum_v \left\{ \left[ \begin{array}{l} (\partial Q_{yv}^T (AA^* \otimes 1_R) \partial Q_{yv}) \circ (\partial V_{yv}^T (1_M 1_M^T \otimes 1_R) \partial V_{yv}) \circ (\partial F_{yv}^T (1_M 1_M^T \otimes 1_T) \partial F_{yv}) \\ \circ (\partial S_{yv}^T (1_M 1_M^T \otimes 1_G) \partial S_{yv}) \end{array} \right] \right\}. \quad (4.239)$$

Имея информационную матрицу Фишера, далее без проблем удастся перейти к анализу нижней границы Крамера–Рао, выполнив обращение указанной матрицы.

Полученная матрица Фишера (4.235), с учетом (4.236) – (4.239), позволяет осуществить анализ потенциальных возможностей многопозиционных надводных, наземных, воздушных и космических РЛС с ЦАР, объединенных в единую РСРР на ТВД, относительно точности измерения координат целей и параметров их эхосигналов, а также спрогнозировать предельные показатели РСРР по разрешающей способности в отношении групповых целей.

В целом же предложенная выше модель РСРР создает условия для эффективного анализа не только статистических параметров

самой системы, но и предусмотренных для нее методов обработки сигналов. Прежде всего, речь идет об оценке отклонения свойств того или иного метода от потенциально возможных границ точности и разрешающей способности в многосигнальной ситуации.

При повышении иерархичности блоков, входящих в состав матрицы  $P$  (привлечение дополнительных регионов, антенных секций в РЛС с ЦАР, проведение нескольких замеров во времени и пр.), единичная матрица  $1_V$  в (4.235) заменяется кронекеровским произведением, например,  $1_W \otimes 1_N \otimes 1_V$ .

При этом добавление новых иерархических множителей  $(1_W \otimes 1_N)$  осуществляется влево от множителя первого уровня иерархии  $1_V$ .

Аналогично можно вести речь о замене вектора единиц  $1_V$  на соответствующее кронекеровское произведение  $1_W \otimes 1_N \otimes 1_V$ , что впрочем эквивалентно трансформации его в новый вектор единиц размерностью  $1_{WNV}$ .

Изложенный здесь подход является основой для последующего теоретического прорыва в решении проблемы аналитической оценки точности многокоординатных конформных мультистатичных РЛС с неидентичными каналами ЦАР, функционирующих в многосигнальном режиме. К сожалению, непомерно растущая математическая сложность соответствующих аналитических выкладок не позволяет уделить должное внимание этому вопросу в данной работе.

В целом же, приведенные результаты представляют несомненный практический интерес, подтверждением чему могут служить уже полученные на их основе неизвестные прежде в теории свойства предельной разрешающей способности дальнометрических процедур, о которых речь пойдет ниже.

## *Предельное разрешение дальномерных процедур максимального правдоподобия*

Чрезмерная сложность аналитического описания характеристик большинства методов оценивания в многосигнальных ситуациях приводит к невозможности исследования потенциальной точности алгоритмов "сверхразрешения" аналитическим путем, без их экспериментальной прогонки на выборочном множестве моделей сигналов. По этой причине в задачах спектральной селекции проверка разрешающей способности измерительных процедур помимо физических экспериментов осуществляется на основе искусственных цифровых тест-последовательностей [52]. Между тем столь желанную аналитическую методику оценки потенциальной разрешающей способности различных способов измерения позволяет получить изложенная выше теория торцевых произведений матриц. Особенности применения такой методики рассмотрим на примере импульсной дальнометрии как наименее исследованной области приложения алгоритмов сверхрелеевского разрешения.

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных результатов анализа точности дальномерных процедур, следует изложить наиболее общие принципы используемого при этом подхода. Одним из ключевых его понятий является **предел разрешения**, трактуемый, согласно [52], как **расстояние  $b_{nm}$  между соседними источниками, при котором для заданного отношения сигнал-шум выполняется условие:**

$$b_{nm} \geq 3\sigma_n + 3\sigma_m, \quad (4.240)$$

где  $\sigma_n$  – нижняя граница Крамера-Рао для СКО несмещенной оценки того параметра  $n$ -го источника, по которому производится разрешение.

Данный показатель является частным случаем приведенного в [7] определения разрешающей способности

$$\delta_x = \alpha \cdot (\sigma_n + \sigma_m) \quad (4.241)$$

и позволяет обеспечить предельно малую вероятность совпадения оценок параметров сигналов, составляющую около  $0,9 \cdot 10^{-3}$ . Из анализа (4.240) следует, что для расчета предельной разрешающей способности любого метода оценивания, максимизирующего функцию правдоподобия, достаточно определить нижнюю границу Крамера–Рао, соответствующую многосигнальной ситуации приема. С учетом этого, отправной точкой предлагаемого подхода является вывод аналитического выражения для предельно достижимой дисперсии ошибки оценивания интересующих параметров  $M$  источников, чему и был посвящен материал предшествующих подразделов.

В рамках данной методики воспользуемся блочной записью информационной матрицы Фишера  $\mathbf{I}$  для некоррелированных гауссовых шумов [47]. При этом для сокращения количества исследуемых ситуаций удобно ограничиться случаем синфазного взаимодействия несущих радиоимпульсов в области перекрытия сигналов при их нулевой начальной фазе. Сами же дисперсии ошибок оценивания (при большом количестве сигналов) будут определены в результате обращения  $\mathbf{I}$ , например, в рамках встроенных процедур матричной инверсии в пакетах Mathcad или Matlab. Для проверки правильности функционирования процедур формирования и обращения информационных матриц желательно, кстати, использовать контрольные примеры с заранее предсказуемым результатом в отношении любых их размерностей. В ходе исследований в качестве таких тестов применялись матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали и единицами – за ее пределами.

Перебирая возможные варианты взаимного расположения импульсов для заданной модели огибающей и манипулируя отношением сигнал-шум, в результате вычисления элементов и последующего обращения матрицы Фишера можно найти ситуации, при которых условие (4.240) перестает выполняться. Это и будет

пределом разрешения дальномерной процедуры для заданного количества источников  $M$ .

Чтобы исходные условия сделать регулярными, ограничимся равным отношением сигнал-шум для всех сигналов и равномерным расположением их по дальности при одинаковой длительности. В этом случае разрешающая способность в 2-сигнальной ситуации будет определяться величиной  $3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = 6 \cdot \sigma_{1(2)}$ , так как  $\sigma_1 = \sigma_2$ . При  $M \geq 3$  источниках на результат разрешения влияет точность оценивания параметров внутренней группы сигналов, условия измерения которых при большом числе наложений и достаточно протяженном импульсе будут наихудшими. Так, при  $M = 3$  показателем разрешения является утроенная сумма СКО  $\sigma_2 + \sigma_{1(3)}$ , поскольку для равномерного распределения источников внутри импульсного объема  $\sigma_2 > \sigma_3 = \sigma_1$ . Аналогично, для четырех равномоощных источников  $\sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_4$ , поэтому о качестве разрешения позволяет судить величина  $6 \cdot \sigma_{2(3)}$ . Наконец, при длительности импульса, к примеру, в 100 отсчетов АЦП и более 5-сигнальная ситуация характеризуется соотношением  $\sigma_3 \geq \sigma_2 = \sigma_4 \geq \sigma_1 = \sigma_5$ , что позволяет при анализе разрешающей способности ограничиться лишь контролем значения  $3 \cdot (\sigma_3 + \sigma_{2(4)})$ . При шести и более сигналах зачастую разрешение может наступать только в том случае, когда в одном импульсном объеме находится лишь часть из равномерно рассредоточенных по дальности источников. Как следствие, возможны ситуации, когда внутренним сигналам соответствует меньшее СКО ошибки измерения дальности, чем окаймляющим импульсам. В этом случае тестированию на соблюдение условия (4.240) необходимо подвергать все  $\sigma_n$ , а не только их величины, соответствующие центральным сигналам пакета.

В качестве исходных данных, характеризующих различия во временном положении импульсов, для анализа предельного раз-

решения в случае измерения дальности непосредственно по отсчетам АЦП достаточно задавать только взаимные перекрытия соседних по времени сигналов  $d_{nm}$ . Глубина же взаимного наложения остальных, если это необходимо, вычисляется по формулам:  $d_{nk} = d_{nm} + d_{mk} - N$ , где  $N$  – длительность сигнала в отсчетах АЦП,  $d_{nk} = N - b_{nk}$ ,  $b_{nk}$  – расстояние между  $n$ -м и  $k$ -м источниками. К примеру, для трех сигналов по известным  $d_{12}$  и  $d_{23}$  получим:  $d_{13} = d_{12} + d_{23} - N$ .

Перейдем далее к обсуждению полученных результатов применительно к видеоимпульсам с образующей  $\sin^2 x$ . В отличие от [47], будем ориентироваться на измерение дальности без дополнительного стробирования отсчетов АЦП. В этом случае значения элементов матрицы  $S(Z)$  можно выразить в виде

$$S_t(z_m) = \begin{cases} \sin^2(t - z_m)x & \text{при } z_m \leq t < z_m + N; \\ 0 & \text{при } t < z_m \text{ и } t \geq z_m + N, \end{cases} \quad (4.242)$$

где  $t$  – порядковый номер элемента матрицы  $S(Z)$  в столбце;  $t = 1, \dots, z_M + N$ ;  $z_m$  – отсчитанный от начала первого сигнала  $z_1 = 1$  порядковый номер первого из отсчетов АЦП в пределах существования  $m$ -го импульса;  $N$  – длительность сигнала в отсчетах АЦП;  $m$  – номер элемента матрицы  $S(Z)$  в строке;  $x = \pi/N$ .

На рис. 4.14 представлены результаты исследований, характеризующие предельное разрешение двух – шести  $\sin^2$ -импульсов длительностью по основанию 100 отсчетов АЦП. При этом анализ проводился в пакете MathCad на основе использования матричной записи нижней границы Крамера–Пао (4.191). Наибольшие временные затраты, как выяснилось, потребовались для формирования кронекеровского произведения матриц  $AA^* \otimes I_T$ . Например, для 100-отсчетных сигналов с равномерным взаимным сдвигом в 14 отсчетов АЦП формирование правого нижнего

блока матрицы Фишера составило около 15 минут, тогда как вся процедура расчета нижней границы Крамера–Рао не превысила 17 минут. Вдоль горизонтальной оси на рис. 4.14 указано отношение сигнал-шум по напряжению в разгах, которое задавалось одинаковым для всех сигналов (в качестве характеристик шумов использовалось их СКО в квадратурной составляющей). Цифры в правой части рисунка, комментирующие маски прямоугольников, соответствуют количеству разрешаемых импульсов. По вертикальной оси в отсчетах АЦП отложено расстояние между равномерно расположенными по дистанции источниками, при котором начинает соблюдаться условие (4.240). Как и следовало ожидать, разрешающая способность возрастает по мере увеличения энергетики сигналов для любого их количества. При отношении сигнал-шум 60 дБ (1024 раза) по напряжению устойчивое разрешение ограничено интервалом между соседними импульсами, составляющим 3–4 % от их длительности.

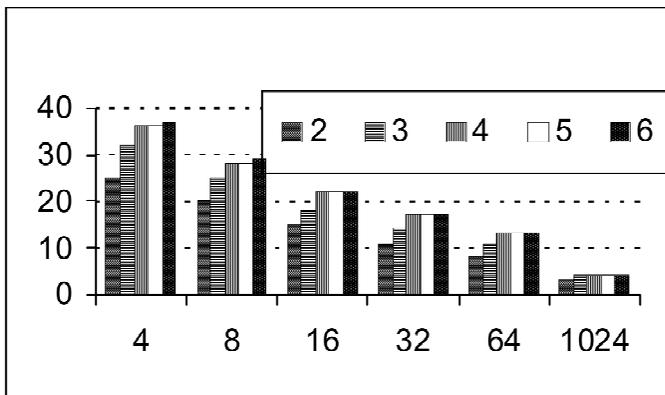


Рис. 4.14. Предел разрешения (4.226) для 100-отсчетных  $\sin^2$ -импульсов

Неожиданным фактом явилось практически полное (с учетом округления) совпадение для указанных выше условий предельно допустимых интервалов между соседними во времени сигналами

при  $M > 4$ . Это объясняется тем, что при указанном количестве источников и равномерном их распределении по дальности сумма СКО оценок времени прихода сигналов внутренней группы в (4.240) незначительно меняется с ростом их числа. Характерно, что такое же явление имеет место и для огибающей вида  $\sin x$  (см. рис. 4.15). В целом, следует заключить, что предельное разрешение многосигнальных дальномерных процедур существенно зависит от закона изменения формы импульса. Дальнейшие исследования должны охватить более обширный класс сигналов и моделей шумов. В особенности представляет интерес анализ влияния на разрешающую способность корреляционной функции шума.

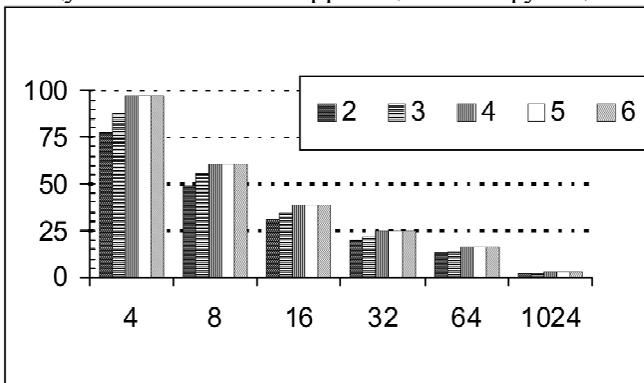


Рис. 4.15. Предел разрешения (4.226) для 100-отсчетных  $\sin$ -импульсов

Поскольку одной из возможных областей применения дальномерных процедур свехрелеевского разрешения является построение дальностных портретов целей, важен следующий вывод: **"При решении задач распознавания анализ характеристик разрешения должен охватывать не только СКО оценок дальности, но и ошибок измерения амплитуд сигналов"**. Например, при отношении сигнал-шум 1024 в случае  $M = 4$  предельное разрешение по дальности, как было указано, составляет 4

% от длительности импульса, тогда, как СКО оценок амплитуд сигналов достигает 15–20 %. Такая точность вряд ли приемлема для качественного построения яркостного портрета цели. В то же время, при удвоении интервала между сигналами погрешность определения амплитуд внутренних импульсов падает почти до 3,5 %. Это следует учитывать при решении задач пересчета оценок дальности в значения других параметров через обобщенные амплитуды сигналов. Очевидно, что большая погрешность оценивания амплитуд каждого импульса, а значит и обобщенных амплитуд, приведет к заметным ошибкам измерения остальных координат. Следует отметить также независимость СКО оценок времени задержки одних сигналов от отношения сигнал-шум других.

При неравномерном распределении источников по дистанции пределы разрешения, указанные на рис. 4.14, могут быть уменьшены. Сосредоточение части импульсов в одной временной области "уравновешивается" удалением остальных на большее расстояние. Например, предел разрешения для трех источников, равный 32 отсчетам (сигнал-шум 4), можно снизить до 25, "уравновесив" пару сигналов с интервалом 25 посредством смещения третьего импульса на 75 отсчетов от начала среднего сигнала.

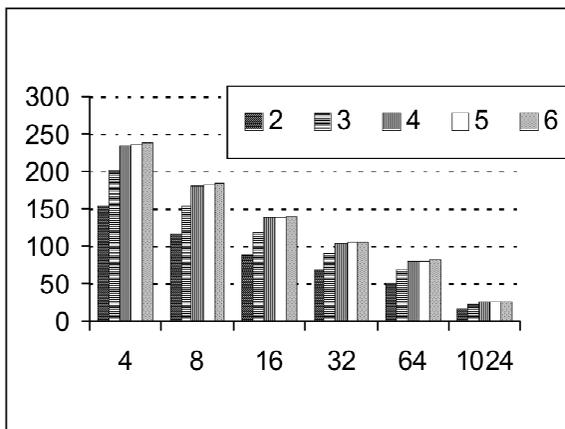


Рис. 4.16. Предел разрешения (4.226) для 1000-отсчетных  $\sin^2$ -импульсов

Рассмотренная картина качественно сохраняется и при других длительностях импульсов. Так, на рис. 4.16 представлены результаты, соответствующие 1000 – отсчетному  $\sin^2$  - сигналу для 1 – 6 источников.

По сравнению с рис. 4.14 заметно улучшение разрешения в процентном выражении. Например, для отношения сигнал-шум 1024 в двухсигнальной ситуации предельный интервал между источниками сократился до 1,7 % от длительности импульса. Такой результат хорошо согласуется с известным в спектральном оценивании 2-процентным пределом разрешения процедуры MUSIC для той же энергетики [69].

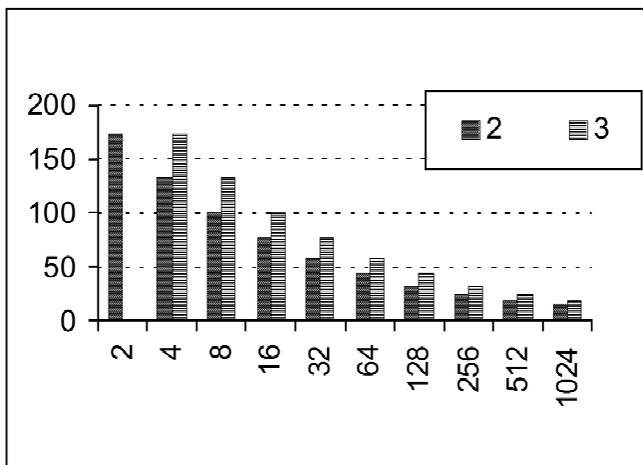


Рис. 4.17. Предел разрешения (4.227) при  $\alpha = 2$  для 1000-отсчетных  $\sin^2$ -импульсов

Примечательно, что в 3-сигнальной ситуации для достижения предела разрешения, присущего 2-сигнальной модели, требуется удвоение отношения сигнал-шум по напряжению. По данным рис. 4.14 эта закономерность проявилась не столь отчетливо. Характерно, что столь специфичная взаимосвязь 2- и 3-сигнальных

процедур измерения сохраняется также при других определениях предела разрешения. На рис. 4.17 для 1000-отсчетного сигнала прямоугольниками показаны интервалы, удовлетворяющие условию  $b_{nm} \geq 2 \cdot \sigma_n + 2 \cdot \sigma_m$ , причем цифровые обозначения остались прежними. Отсюда можно сделать принципиальный вывод о целесообразности противопоставления 2-целевому алгоритму "3-целевика" с тем же пределом разрешения лишь после сокращения расстояния "РЛС-групповая цель" в  $\sqrt{2}$  раз. Подобная адаптация может существенно снизить аппаратные затраты на реализацию многосигнальной обработки.

Важнейшим результатом проведенных исследований является подтверждение возможности разрешения по условию (4.240) не более 5 источников, равномерно расположенных в импульсном объеме протяженностью 100 отсчетов АЦП, если расстояние от них до РЛС не превышает  $0,5 \cdot D_{\max}$ . Здесь  $D_{\max}$  – дальность, с которой по типовому отражателю в приемнике РЛС обеспечивается отношение сигнал-шум 12 дБ по напряжению ( $\sim 4$  раза). При более плотной "упаковке" эхосигналов, например, с равномерным интервалом в 13 % от их длительности, зона разрешения 5 – 6 импульсов для 100-отсчетного сигнала сокращается до  $0,25 \cdot D_{\max}$ , при этом указанное отношение сигнал/шум составляет  $\sim 64$  раза.

Результаты проведенных исследований позволили подтвердить установленный ранее факт [52], что при больших отношениях сигнал-шум значение СКО ошибки измерения времени прихода внутренних сигналов становится функцией расстояния между источниками и не зависит от их количества. Например, при амплитуде сигнала 1024 и 4-отсчетном взаимном смещении сигналов во времени указанное СКО замораживается на уровне 0,654, оставаясь таковым как для 5 сигналов в объеме 100 – отсчетного импульса, так и для 25. К сожалению, из-за недостаточной вычислительной мощности используемого компьютера анализ разрешающей способности пришлось ограничить 26 целями и 100

отсчетным импульсом. Впрочем, дальнейшее увеличение этих параметров представляет пока интерес преимущественно с теоретической точки зрения.

Таким образом, рассмотренная методика позволяет обоснованно распределить по дистанции рубежи постановки задач разрешения  $M$  источников, варьируя величиной  $M$  по дальности. Кроме того, с ее помощью становится возможным наложить ограничения на пределы итерационного перебора оценок времени прихода сигналов в зависимости от амплитуды сигнальной смеси.

Аналогичным образом могут быть получены предельные показатели разрешения как для задач частотной селекции и угловой пеленгации, так и совместного оценивания нескольких координат  $M$  источников.

В заключение, следует отметить, что оценка эффективности дальномерных процедур свехррелеевского разрешения может осуществляться не только по рассмотренным показателям (точность измерения, предельная разрешающая способность). Указанные показатели могут быть использованы для оценки эффективности всей зенитно-ракетной системы (ЗРС), в состав которой входят РЛС сопровождения целей со свехррелеевским разрешением. При этом, даже, не принимая в расчет многоканальные ЗРС, можно рассчитывать на скачкообразный прирост эффективности выполнения задач ПВО в условиях плотного построения авиагрупп и уводящих помех самоприкрытия. Свехррелеевская дальнометрия позволяет устойчиво сопровождать групповые цели либо одиночные источники имитирующих помех, что создает предпосылки для восстановления эффективности ЗРС до приемлемых величин, а в случае многоканального построения зенитно-ракетных комплексов – для многократного прироста эффективности отражения воздушных ударов по такому показателю, как математическое ожидание сбитых за налет целей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арипов М. Н. Контроль и управление в сетях передачи данных с коммутацией пакетов / М. Н. Арипов, С. П. Присяжнюк, Р. А. Шариков. – Ташкент, 1988. – 160 с.
2. Бакут П. А. Методы определения границ точности в задачах оценивания неизвестных параметров / П. А. Бакут, В. П. Логинов, Ю. П. Шумилов // Зарубежная радиоэлектроника. – 1978. – № 5. – С. 3–36.
3. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. – М.: Статистика. – 1979. – 349 с.
4. Бертсекас Д. Сети передачи данных / Д. Бертсекас, Р. Галоген. – М.: Мир, 1998. – 544 с.
5. Большев В. Н. Таблицы математической статистики / В. Н. Большев, В. Н. Смирнов. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 474 с.
6. Бушуев С. Н. Теоретические основы создания информационно-технических систем / С. Н. Бушуев, А. С. Осадчий, В. М. Фролов. – СПб.: ВАС, 1998. – 404 с.
7. Варюхин В. А. Основы теории многоканального анализа. – К.: ВА ПВО СВ, 1993. – 172 с.
8. Варюхин В. А. Модифицированная функция правдоподобия в задаче определения угловых координат источников с помощью антенной решетки / В. А. Варюхин, В. И. Покровский, В. Ф. Сакно // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270. № 5. – С. 1092–1094.
9. Зоуе Л. Лингвистическая переменная. – М.: Физматгиз, 1972. – 185 с.
10. Илькив В. С. Точные границы Крамера–Рао для многих выборок сигналов в аддитивном гауссовском шуме // Радиотехника и электроника. – 1994. – Вып. 8–9. – С. 1336–1347.
11. Колло Тыну. Матричная производная для многомерной статистики. – Тарту: Тартуский гос. Университет, 1991. – 153 с.
12. Кондрашина Е. Ю. Представление значений в интеллектуальных системах / Е. Ю. Кондрашина, Л. В. Литвинцева, Д. А. Поспелов; Под ред. Д. А. Поспелова. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
13. Котенко И. В. Теория и практика построения автоматизированных систем информационной и вычислительной поддержки процессов планирования связи на основе новых информационных технологий. – СПб.: ВАС. – 1988. – 404 с.
14. Люггер Дж. Ф. Искусственный интеллект: стратегия и методы решения сложных проблем. – М.: Изд. Дом “Вильямс”, 2003. – 367 с.
15. Марпл - мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
16. Методи оцінки ефективності та оптимізації зразків озброєння та військової техніки: Зб. наук. праць / Київський інститут Сухопутних військ; За заг. ред. В. І. Рудакова. – Ч. 1, 2. – К.: КІСВ, 1997. – 339 с.
17. Міночкін А. І. Вимоги до системи прикладного математичного забезпечення управління мобільною компонентою мережі зв'язку військового призначення / А. І. Міночкін, П. В. Шаціло // Зб. наук. праць / КПІ. – № 2. – К.: КПІ, 2005. – С. 97–105.
18. Міночкін А. І. Архітектура перспективної мобільної компоненти тактичних мереж зв'язку Збройних Сил України. / А. І. Міночкін, В. А. Романюк // Зб. наук. праць / ВІПІ НТУУ КПІ. – № 5. – К.: ВІПІ НТУУ КПІ, 2004. – С. 107–115.
19. Міночкін А. І. Об'єктна, багатоагентна модель оперативного управління мобільною компонентою мережі зв'язку військового призначення нового покоління / А. І. Міночкін, П. В. Шаціло // Зб. наук. праць / ВІПІ НТУУ КПІ. – № 3. – К.: ВІПІ НТУУ КПІ, 2008. – С. 107–118.

20. Міночкін А.І. Основні положення еволюційної методології побудови прикладного математичного забезпечення оперативного управління мобільними компонентами мереж зв'язку військового призначення // Зб. наук. праць / ВІПі НТУУ КПі. – № 3. – К.: ВІПі НТУУ КПі, 2007. – С. 81–85.
21. Міночкін А. І. Концепція управління мобільною компонентою мереж зв'язку військового призначення / А. І. Міночкін, В. А. Романюк // Зб. наук. праць / ВІПі НТУУ КПі. – № 3. – К.: ВІПі НТУУ КПі, 2005. – С. 51–60.
22. Міночкін А. І. Управління мобільними мережами військового призначення – проблема та шляхи рішення / А. І. Міночкін, В. А. Романюк // Зб. наук. праць / ВІПі НТУУ КПі. – № 4. – К.: ВІПі НТУУ КПі, 2003. – С. 112–119.
23. Міночкін А. І. Оперативне управління інтелектуальною мережею військового призначення / А. І. Міночкін, В. А. Романюк // Зб. наук. праць / ВІПі НТУУ КПі. – № 2. – К.: ВІПі НТУУ КПі, 2000. – С. 120–125.
24. Миночкин А. И. Управление топологией мобильной радиосети / А. И. Миночкин, В. А. Романюк // Зб. наук. праць / ВІПі НТУУ КПі. – № 2. – К.: ВІПі НТУУ КПі, 2003. – С. 28–33.
25. Миночкин А. И. Методология оперативного управления мобильными радиосетями / А. И. Миночкин, В. А. Романюк // Зв'язок. – 2005. – № 2. – С. 53–58.
26. Пантюхин В. Микропроцессорное многопоточие // Открытые системы. —2006. – № 6 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.osp.ru/text/302/2700454/>.
27. Пат. 56922 України, А. ІРС8 G01S13/02, G01S13/06, G01S13/48, G01S13/74, G01S13/86, G01S13/87. Спосіб виявлення повітряних цілей за допомогою системи стільникового зв'язку / В. І. Слюсар, І. В. Тітов. –№2002119018; Опубл. 15.05.2003, Бюл. № 5, Пріоритет 12.11.2002.
28. Покровский В. И. Совместный алгоритм определения частоты и дальности многоканальным анализатором / В. И. Покровский, В. Ф. Сахно, В. И. Слюсар // Стохастические модели систем: Сб. науч. трудов. – К.: АН УССР, ВА ПВО СВ, 1991. – С. 56 – 62.
29. Покровский В. И. Определение пространственного положения радиолокационных источников и времени задержки их эхосигналов РЛС на базе ЦАР / В. И. Покровский, В. Ф. Сахно, В. И. Слюсар // Стохастические модели систем: Сб. науч. трудов. – К.: АН УССР, ВА ПВО СВ, 1991. – С. 62 – 68.
30. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А. Г. Зюко, А. И. Фалько, Н. П. Панфилов [и др.]; Под ред. А. Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.
31. Поспелов Д. А. Ситуационное управление: Теория и практика. – М.: Наука, 1986. – 284 с.
32. Романюк В. А. Напрямки розвитку тактичних систем зв'язку // Матеріали ІІ науково-технічної конференції ВІПі. –К.: ВІПі НТУУ "КПі". – 2004. – С. 23 – 33.
33. Романюк В. А. Активная маршрутизация в мобильных радиосетях // Зв'язок –2002. – № 3. – С. 21–25.
34. Романюк В. А. Комбінація і загальна характеристика задач управління тактичними автоматизованими мережами радіозв'язку // Зб. наук. праць / ВІПі НТУУ КПі. – № 4. – К.: ВІПі НТУУ КПі, 1999. – С. 3–7.
35. Рудаков В. И. Тропосферные системы связи с адаптивными антеннами. – К.: ЦНИИ ВВТ ВС Украины; АО «Авионика», 1999. – 292 с.
36. Рудаков В. И. Концепция определения потерь коэффициента усиления антенн при тропосферном распространении радиоволн // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 2000. – № 4. – С. 35–41.

37. Рудаков В. И. Принцип минимакса в расчетах энергетических характеристик радиотехнических систем при тропосферном распространении радиоволн // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника.– 2003. – Т. 46; №11. – С. 42–49.
38. Рудаков В. И. Алгоритм автоматизации максимина в принятии достоверных решений при тропосферном распространении радиоволн // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 2004. – Т. 47; № 1. – С. 18–27.
39. Рудаков В. І. Метод двоконтурної обробки сигналів в зразках озброєння і військової техніки при тропосферному поширенні радіохвиль // Зб. наук. праць Військового інституту Національного університету ім. Т. Шевченка. – Ювілейний вип. – К.: ВІ НУН ім. Т. Шевченка, 2003. – С. 140–148.
40. Рудаков В. И. Адаптивный автомат компенсации быстрых и медленных замираний сигнала и потерь усиления антенн в образце тропосферной связи // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 2008. – Т. 49; № 6. – С. 68–80.
41. Слюсар В. И. Технология мульти-ММО в гарантоспособных беспроводных системах связи / В. И. Слюсар, Н. А. Масесов // Зб. наук. праць Харківського університету Повітряних Сил. – Вип. 1 (16). – Харків: ХУ ПС, 2008. – С. 39–42.
42. Слюсар В. И. Метод анализа потенциальной точности многокоординатных радиолокационных измерений // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – Том 43; № 1. – 2000. – С. 68–75.
43. Слюсар В. И. Многоядерная архитектура. Проблемные аспекты. // Электроника: наука, технология, бизнес. – 2007. – № 1. – С. 92 – 97.
44. Слюсар В. И. SMART-антенны. Цифровые антенные решетки (ЦАР). ММО-системы на базе ЦАР // Широкополосные беспроводные сети передачи информации / В. М. Вишневский [и др.]. – М.: Техносфера, 2005. – С. 542–564.
45. Слюсар В. И. Торцевые произведения матриц в радиолокационных приложениях // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1998.– Т. 41; № 3. – С. 71 – 75.
46. Слюсар В. И. Семейство торцевых произведений матриц и его свойства // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 3.– С. 43–49.
47. Слюсар В. И. Синтез алгоритмов измерения дальности М источников при дополнителном стробировании отсчетов АЦП // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1996. – Т. 39; № 5. – С. 55 – 62.
48. Слюсар В. И. Методика пересчета результатов сверхразрешения в оценки других параметров сигналов // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1997.– Т. 40; № 5. – С. 74 – 76.
49. Слюсар В. И. Обобщенные торцевые произведения матриц в моделях цифровых антенных решеток с неидентичными каналами // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 2003. – Том 46, № 10. – С. 9 – 17.
50. Слюсар В. И. Информационная матрица Фишера для моделей систем, базирующихся на торцевых произведениях матриц // Кибернетика и системный анализ.– 1999.– № 4.– С. 141 – 149.
51. Слюсар В. И. Цифровые методы оценивания временного положения колоколообразных радиоимпульсов // Известия вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1997. – Том 40, № 1.– С. 33 – 38 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.slyusar.kiev.ua/IZV\\_VUZ\\_1997\\_1.pdf](http://www.slyusar.kiev.ua/IZV_VUZ_1997_1.pdf).
52. Слюсар В. И. Предельное разрешение дальномерных процедур максимального правдоподобия // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1998. – Т. 41; № 11. – С. 39 – 45.
53. Слюсар В. И. ММО-метод передачи телекодовой информации / В. И. Слюсар, А. Н. Дубик, С. В. Волошко // Известия вузов. Сер. Радиоэлектроника.– 2007. – Т. 50; № 3. – С. 61 – 70.

54. Слюсар В. И., Волошко С. В. Метод помехозащищенной демодуляции сигналов N-OFDM в приемном сегменте ЦАР. //Материалы XV Международной научно-технической конференции “Информационные системы и технологии (ИСТ-2009)”. – Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева. – 2009. – С. 6. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.slyusar.kiev.ua/IST\\_2009\\_3.pdf](http://www.slyusar.kiev.ua/IST_2009_3.pdf).
55. Слюсар В.И., Волошко С.В., Малярчук М.В. Нижние границы Крамера–Рао для дисперсий ошибок оценивания амплитуд сигналов N-OFDM по выходам плоской цифровой антенной решетки // Матеріали III Міжнародного науково-технічного симпозиуму "Нові технології в телекомунікаціях"- (ДУІКТ– КАРПАТИ '2010, с. Вишків). – Київ: Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій. – 2–5 лютого 2010. – С. 56 – 58.
56. Слюсар В.І., Зінченко А.О. Модель відгуку багатосекційної ЦАР з плоскими підрешітками в інтегрованій мобільній станції зв'язку та радіолокації // Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції “Обробка сигналів і негаусівських процесів”, присвячена пам'яті професора Кунченка Ю.П. - Черкаський державний технологічний університет. – 24 – 27 травня 2011 р. – С. 62 – 64.
57. Слюсар В. И. Частотное уплотнение каналов связи на основе свержелеевского разрешения сигналов / В. И. Слюсар, В. Г. Смоляр // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 2003. – Т. 46; № 7. – С. 22–27.
58. Стеклов В. К. Оценка объема управляющей информации в информационных сетях / В. К. Стеклов, Л. Н. Беркман // Электросвязь. – 2000. – № 6. – С. 40–46.
59. Хорн Р. Матричный анализ: Пер. с англ. / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989.– 655 с.
60. Шоломов Л. А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
61. Цымбал В. Л. Теория информации и кодирования: Учеб. – К.: Вища шк., 1982. – 263 с.
62. WiMAX – технология беспроводной связи: Теоретические основы, стандарты, применение / В. С. Святкин, В. И. Есипенко, И. П. Ковалев, В. Г. Сухоробров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 368 с.
63. Alamouti S. M. Space-time block coding: A simple transmitter diversity technique for wireless communications // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – Oct. 1998. – Vol. 16. – Pp. 1451–1458.
64. Dawn Meyerriecks. NetCentric Warfare: Technology Driven Agility // Interoperability & Systems Integration Conference, 22–25 March 2004 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.dtic.mil/ndia/2004interop/Tues/meyerricks.ppt>.
65. Charlie Murray. Leading Airborne Data Comms to the GIG [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.tidewaterafcea.org/archives/2006/AFCEA\\_luncheon\\_10Mar06.pdf](http://www.tidewaterafcea.org/archives/2006/AFCEA_luncheon_10Mar06.pdf).
66. Chun-Yang Chen. Signal Processing Algorithms for MIMO Radar. – Pasadena, California, California Institute of Technology/ In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy. – 2009.
67. Esteve A. Interaction Terms in Distance-Based Regression / Anna Esteve, Eva Boj, Josep Fortiana // Communications in Statistics: Theory and Methods. – Vol. 38, Issue 19, 2009. – P. 3498 – 3509.
68. Fortiana J. Interaction Terms in the Distance-Based Regression Model / Josep Fortiana, Anna Esteve // Abstracts of the 11th European Meeting of the Psychometric Society. Lüneburg, 19–22 Juli 1999.

69. Jamada H. Superresolution Techniques for Time-Domain Measurements with a Network Analyzer / H. Jamada, M. Ohmiya, J. Ogawa, K. Itoh // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1991. – Vol. 39. – N 2. – Pp. 177 – 183.
70. Khatri C. G. Solutions to some functional equations and their applications to characterizations of probability distributions / C. G. Khatri, C. R. Rao // *Sankhya, Ser. A.* – 1968. – Vol. 30. – Pp. 167 – 180.
71. Birman K. Using Self-Regenerative Tools to Tackle Challenges of Scale // January 2005 PI Meeting [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.tolerant systems.org/SRSProgram/SRSPI\\_MeetingPresentations/Ken%20Birman%20Public%20Release.ppt](http://www.tolerant systems.org/SRSProgram/SRSPI_MeetingPresentations/Ken%20Birman%20Public%20Release.ppt).
72. Kimberly A. Holloman. Network Centric Operations Conceptual Framework // *IT Value in the Netcentric Organization: Integrating Commercial and Military Perspectives*, December 9–10, 2003 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://forcenet.navy.mil/concepts/metrics/netcentricmetrics/briefing\\_316\\_holloman-presentation.ppt](http://forcenet.navy.mil/concepts/metrics/netcentricmetrics/briefing_316_holloman-presentation.ppt).
73. Knockaert L. The Barankin Bound and Threshold Behavior in Frequency Estimation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://allserv.rug.ac.be/~lknockae/pdf/barankin.pdf>.
74. Schiavone L. Joint Program Executive Office Joint Tactical Radio System (JPEO JTRS). JTRS Overview for CCEB Spectrum Task Force. – 03 May 2006. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://enterprise.nosc.mil/getfile.cfm?contentId=1488&type=R>.
75. Manikas A. Modeling and estimation of mutual coupling between array elements / A. Manikas, N. Fistas // *IEEE Proceedings of ICASSP*. – 1994. – Vol. 4. – Pp. 553 – 556. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://skynet.ee.ic.ac.uk/papers/AM1994\\_009ICASSPmc.pdf](http://skynet.ee.ic.ac.uk/papers/AM1994_009ICASSPmc.pdf).
76. Manikas A. Evaluation of superresolution array-techniques as applied to coherent sources / A. Manikas, T. Ratnarajah, Jinsock Lee // *International Journal of Electronics*. – January 1997. – Vol. 82.–N 1.– Pp. 77 – 105. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://skynet.ee.ic.ac.uk/papers/AM97IJE.pdf>.
77. Renaux A. Estimation Lower Bounds: links between deterministic and Bayesian bounds // *Newcom Workshop at Aalborg University*, November 18 – 19 2005, Aalborg, Denmark. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://ese.wustl.edu/~renaux/talk/Aalborg\\_alex\\_18\\_Nov\\_05.ppt](http://ese.wustl.edu/~renaux/talk/Aalborg_alex_18_Nov_05.ppt).
78. Renaux A. Weiss-Weinstein bound for Data Aided carrier estimation // *IEEE Signal Processing Letters*. – Vol. 14, Issue: 4, Apr. 2007. – Pp. 283–286 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://ese.wustl.edu/~renaux/publications/\[J4\].pdf](http://ese.wustl.edu/~renaux/publications/[J4].pdf).
79. Renaux A. Minimal bounds on the Mean Square Error: A Tutorial. – Washington University in St. Louis. – 23 February 2007 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://ese.wustl.edu/~renaux/talk/WUSTL\\_Alex\\_MinimalBounds.ppt](http://ese.wustl.edu/~renaux/talk/WUSTL_Alex_MinimalBounds.ppt).
80. Warrington E. M. Measurements of direction of arrival of HF sky wave signals by means of a wide aperture antenna array and two super resolution direction finding algorithms // *IEEE Proc. microwaves, antennas and propag.* –1995. – V. 142; № 2.– Pp. 136–144 (Перевод: "Измерение направления прихода сигналов пространственной волны коротковолнового диапазона широкоапертурной антенной решеткой с использованием двух алгоритмов сверхразрешения" // *Экспресс-информация. Сер. Радиотехника и связь*. – М.: ВИНТИ, 1996. – № 22. – С. 2 – 23).
81. Slyusar V.I. The matrix models of digital antenna arrays with nonidentical channels // *Proc. ICATT – 99.*– Sevastopol, September 8 – 11, 1999. – Pp. 241–243.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>1. Синтез средств связи</b> .....	7
1.1. Концептуальные основы синтеза перспективных средств связи.....	7
1.2. Синтез средств связи.....	98
<b>2. Синтез структуры и методов оперативного управления мобильными компонентами сетей связи</b> .....	210
2.1. Концептуальные основы синтеза.....	210
2.2. Синтез структуры оперативного управления мобильными компонентами сетей связи.....	234
2.3. Синтез методов оперативного управления мобильными компонентами сетей связи.....	266
<b>3. Методологические основы математического обеспечения оперативного управления мобильными компонентами сетей связи</b> .....	284
3.1. Концептуальные основы математического обеспечения оперативного управления мобильными компонентами сетей связи.....	284
3.2. Разработка моделей систем оперативного управления мобильными компонентами сетей связи.....	295
<b>4. Синтез средств обеспечения систем вооружения радиолокационной информацией</b> .....	354
4.1. Концептуальные основы синтеза.....	354
4.2. Синтез средств обеспечения систем вооружения радиолокационной информацией .....	365
<b>Литература</b> .....	522

*Наукове видання*

Міночкін Анатолій Іванович  
Рудаков Володимир Іванович  
Слюсар Вадим Іванович

**ОСНОВИ ВОЕННО-ТЕХНИЧНИХ  
ДОСЛІДЖЕНЬ.  
ТЕОРІЯ ТА ПРИКЛАДИ**

**Том 2**

**Синтез засобів інформаційного забезпечення  
озброєння і військової техніки**

Монографія

*(Російською мовою)*

За редакцією О.П. Ковтуненка

В авторській редакції

Художник обкладинки *Т. Зябліцева*  
Верстка *Є. Нестеренко*

Підп. до друку 14.12.11. Формат 60x84/16. Папір офсет №1.

Гарнітура Тип Таймс. Друк офсет. Ум. друк. арк. 15,28.

Обл.-вид. арк. 30,69. Наклад 300 пр. Зам. №